

# الحركة العامة للأجسام الصلبة

(General Motion of Rigid Bodies)

## 8-1 تمهيد : ممتد العطالة (أو ممتد القصور الذاتي) (Inertia Tensor)

درسنا حتى الآن أبسط أنواع حركة الجسم الصلب كالحركة الإنتقالية الخالصة التي تبقى فيها ذرات الجسم كله بوضع معين ثابت بالنسبة لمركز كتلته الذي ينتقل من مكانه تحت تأثير محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه، والحركة الدورانية المستوية التي يدور فيها الجسم حول محور معين يبقى موازياً لاتجاه ثابت دوماً. وقد وجدنا أن قانون الحركة العام في الحالة الأولى هو:

$$\mathbf{F}_T = \frac{d\mathbf{P}_{cm}}{dt} \quad (1-8)$$

حيث  $\mathbf{F}_T$  محصلة القوى المؤثرة على الجسم و  $\mathbf{P}_{cm}$  الزخم الخطي لمركز الكتلة، بينما يكون قانون الحركة في الحالة الثانية بالشكل:

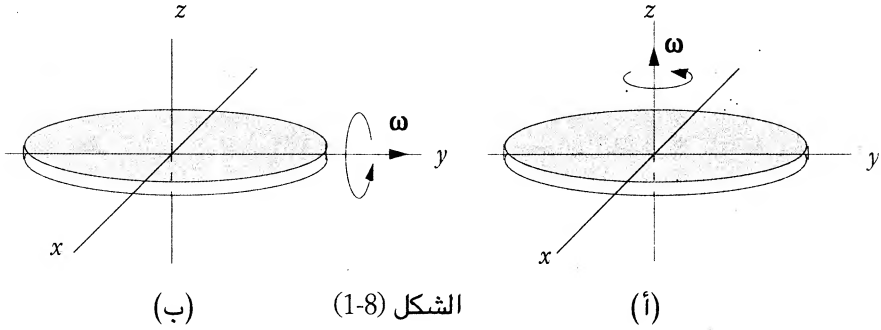
$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} \quad (2-8)$$

حيث  $\tau_z$  محصلة العزوم الخارجية المؤثرة على الجسم بالنسبة لمحور الدوران  $oz$ ، بينما  $L_z$  الزخم الزاوي للجسم بالنسبة لهذا المحور. وسنعمم الحركة الدورانية للجسم الصلب من دوران حول محور إلى دوران حول نقطة.

يمكن تبسيط الفكرة لو اعتبرنا قرصاً يدور حول محور تناظره  $oz$  كما في الشكل (8-11)، عندئذ بفرض أن سرعته الزاوية  $\omega = \omega_z \mathbf{k}$  وعزم عطالته حول هذا المحور  $I_z$  نكتب قانون الحركة على النحو:

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} \mathbf{k} \quad (3-8)$$

لكن ماذا يحدث إذا تغير اتجاه محور الدوران مع الزمن إلى  $oy$ ، كما في الشكل (1-8ب)؟ لاشك بأن  $\omega$  و  $I_z$  ستتغيران عندئذ وتصير المسألة أكثر تعقيداً حتماً.



لذلك نعتبر جسماً صلباً يدور حول نقطة ما، كما في الشكل (2-8) ونبحث عن زخمه الزاوي حولها فنكتب:

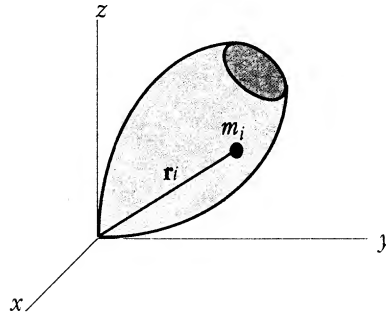
$$(4-8) \quad L = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

بوضع:

$$(5-8) \quad \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i = m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

حيث  $\boldsymbol{\omega}$  السرعة الزاوية التي يدور بها الجسم حول  $O$ ، نجد:

$$(6-8) \quad L = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)]$$



الشكل (2-8)

لكن:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

لذا تصير (6-8):

$$(7-8) \quad \mathbf{L} = \sum_i m_i [r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})]$$

الآن: نعرّف الضرب الثنائي (*dyad product*)، بالعلاقة:

$$(\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

أو

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{AB}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$$

ونكتب:

$$\mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}$$

فتصير (7-8):

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i [r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}]$$

بملاحظة أن:

$$(8-8) \quad \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} .$$

حيث يدل  $\mathbf{1}$  على مجموع الثنائيات  $\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$  ويسمى ممتد الوحدة (*unit tensor*) لأن تطبيقه على  $\boldsymbol{\omega}$  أعطى نفس المتجه تماماً.

بما أن  $\boldsymbol{\omega}$  مستقل عن المجموع في (7-8) لذلك نضعه خارجاً ونكتب:

$$(9-8) \quad \mathbf{L} = \sum_i m_i [r_i^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i] \cdot \boldsymbol{\omega}$$

أو :

$$(10-8) \quad \mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

حيث نطلق على **I** اسم **ممتد العطالة** (أو ممتد القصور الذاتي) (*Inertia Tensor*) ويعطى بالعلاقة:

$$(11-8) \quad I = \sum_i m_i [r_i^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i]$$

نظراً لحاجتنا لاستخدام الممتدات (*tensors*) بشكل موسع من الآن فصاعد، لذا سنعطى في الفقرة التالية بعض المبادئ الأساس في هذا الموضوع، وينصح القارئ بالعودة إلى مراجع متخصصة في هذا الموضوع للاستزادة منه عند الحاجة.

## 8-2 الممتدات (*Tensors*) (اختياري)

عرفنا في الفقرة السابقة الثنائي **AB** بعلاقة محددة هي:

$$(12-8) \quad (\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

حيث نلاحظ أنه لا يوجد أي إشارة بين المتجهين **A** و **B**، من ثم يمكن كتابة أي متجه **A** على النحو:

$$(13-8) \quad \mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = (\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) \cdot \mathbf{A}$$

حيث يطلق على أي من الثنائيات **ii** أو **jj** أو **kk** اسم ممتد.

نلاحظ أن المتجه في الفضاء العادي ينتج من المجموع الخطي للثنائيات الثلاث المذكورة أعلاه فقط ، لذلك نقول إن المتجه هو ممتد من الدرجة الأولى. أما إذا اعتبرنا المجموع الخطي لكل الثنائيات الممكنة التي تنتج عن متجهات الوحدة **i** و **j** و **k** التي يبلغ عددها تسع ثنائيات، فإننا نحصل على تعريف الممتد من الدرجة الثانية على النحو:

$$(14-8) \quad \begin{aligned} \mathbf{A} = & A_{xx} \mathbf{ii} + A_{xy} \mathbf{ij} + A_{xz} \mathbf{ik} \\ & + A_{yx} \mathbf{ji} + A_{yy} \mathbf{jj} + A_{yz} \mathbf{jk} \\ & + A_{zx} \mathbf{ki} + A_{zy} \mathbf{kj} + A_{zz} \mathbf{kk} \end{aligned}$$

من الواضح أن هناك فرق كبير بين الثنائي  $\mathbf{j}\mathbf{i}$  و  $\mathbf{j}\mathbf{j}$  على سبيل المثال ذلك أن:

$$(\mathbf{j}\mathbf{i}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{i} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) = A_y \mathbf{i}$$

بينما:

$$(\mathbf{j}\mathbf{i}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{j} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{A}) = A_x \mathbf{j}$$

من جهة أخرى، يمكن كتابة أي ممتد باستخدام المصفوفات (*matrices*)، فنكتب:

$$(15-8) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}$$

حيث نلاحظ أن  $A_{xx}$  هي أمثال الثنائي  $\mathbf{ii}$  في (14-8) و  $A_{xy}$  هي أمثال  $\mathbf{j}\mathbf{i}$ ، وهكذا دواليك.

### 3-8 جبر الممتدات (*Tensor Algebra*) (اختياري)

#### 1-3-8 جمع الممتدات:

يجمع الممتدان  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  على النحو:

$$(16-8) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \sum_i \sum_j (A_{ij} + B_{ij}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

حيث  $\mathbf{e}_i$  و  $\mathbf{e}_j$  متجهي وحدة على المحورين المعنيين  $i$  و  $j$ .

#### 2-3-8 ضرب الممتدات:

نعلم أن حاصل الضرب العددي لمتجهين  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  يكتب بالشكل:

$$(17-8) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i (A_i \mathbf{e}_i) \cdot (B_j \mathbf{e}_j) = \sum_i \sum_j (A_i B_j) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

إلا أن:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

حيث تدل  $\delta_{ij}$  على دلتا كرونكر وتساوي:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

لذلك يصير حاصل ضرب متجهين مساوٍ إلى:

$$(18-8) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i$$

بنفس الشكل نكتب حاصل ضرب ممتدين  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{ijkl} (A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (B_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l)$$

أو

$$(19-8) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i,j,l=1} A_{ij} B_{jl} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_l)$$

3-3-8 مبادل ممتد (Transpose):

نعرف مبادل ممتد بالعلاقة:

$$(20-8) \quad \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$$

وتعطي مركبات مبادل  $\mathbf{A}$ ، أي مركبات  $\mathbf{A}^t$  بالعلاقة:

$$(21-8) \quad A_{ij}^t = A_{ji}$$

إذا كان  $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$  فإننا نقول إن  $\mathbf{A}$  هو ممتد متناظر (symmetric tensor). يتحدد هذا الممتد عندئذ بمعرفة ستة عناصر منه، بينما نحدد الثلاثة الباقية من العلاقة:

$$(22-8) \quad A_{ij} = A_{ji}$$

وإذا كان  $A^t = -A$  نقول إن  $A$  ممتد مضاد التناظر (asymmetric tensor). يتحدد هذا الممتد بمعرفة ثلاثة من عناصره غير القطرية، لأن:

$$(23-8) \quad \begin{cases} A_{ij} = -A_{ji} & i \neq j \\ A_{ij} = 0 & i = j \end{cases}$$

نلاحظ من تعريف ممتد العطالة أنه متناظر دوماً.

#### 8-3-4 الممتد الثابت (constant tensor) والممتد القطري (diagonal tensor):

نقول إن  $A$  ممتد ثابت إذا كان يكتب بالشكل:

$$(24-8) \quad A = A1 = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث  $A$  عدد ثابت، كما نقول إن  $A$  ممتد قطري إذا كان معطى بالعلاقة:

$$(25-8) \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

لا بأس من أن ننوه إلى نقطة هامة تتعلق بالمصفوفات والممتدات والفرق بينهما. فالمصفوفة مجموعة أعداد جبرية تجمع وتطرح حسب قواعد معينة، أما الممتدات فهي مؤثرات (operators) تؤثر على أي متجه عند ضربها به منتجة متجهاً جديداً قد يختلف عن المتجه الأصلي بمعناه الفيزيائي أو الهندسي أو كلاهما. مثل ذلك تطبيق مؤثر ممتد العطالة  $I$  على متجه السرعة الزاوية  $\omega$ ، فنجد:

$$(26-8) \quad L = I \cdot \omega = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \omega$$

إن نتيجة هذا الضرب هي متجه الزخم الزاوي  $L$  الذي يختلف كلياً عن  $\omega$ .

## 4-8 تحويلات منظومات المحاور الاحداثية

(Transformation of Coordinate Systems)

سنحاول في هذه الفقرة دراسة الطريقة التي تتحول بها مركبات ممتد عندما ننتقل من منظومة محاور أولى  $(e_1, e_2, e_3)$  لأخرى  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  لها نفس المبدأ. نكتب العلاقة بين إحداثيات نقطة بالنسبة للمنظومتين على النحو:

(27-8)

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$$

حيث:

(28-8)

$$a_{ij} = e'_i \cdot e_j$$

يمكن التأكد من العلاقات السابقة باعتبار نقطة في مستو، كما في الشكل (3-8)، حيث نلاحظ أن:

(29-8)

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

حيث:

(30-8)

$$\begin{cases} a_{11} = e'_1 \cdot e_1 = \cos \theta \\ a_{12} = e'_1 \cdot e_2 = \sin \theta \\ a_{21} = e'_2 \cdot e_1 = -\sin \theta \\ a_{22} = e'_2 \cdot e_2 = \cos \theta \end{cases}$$

نكتب ما تقدم بشكل مختصر مستفيدين من المصفوفات بالشكل:

(31-8)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

تدعى المصفوفة:

(32-8)

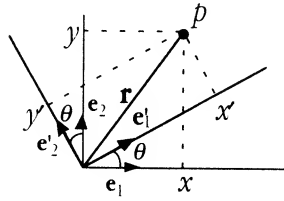
$$(a) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



مصفوفة الدوران (rotation matrix) من  $(x, y)$  إلى  $(x', y')$ .

يمكن البرهان بسهولة أن مصفوفة الدوران من  $(x', y')$  إلى  $(x, y)$  هي:

$$(a') = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (33-8)$$



الشكل (3-8)

الآن: نعلم أنه يمكن كتابة أي متجه  $A$  في منظومة محاور  $(e_1, e_2, e_3)$  بالشكل:

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 = \sum_{i=1}^3 A_i e_i$$

كما يمكن كتابة  $A$  بالنسبة لمنظومة ثانية  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  لها نفس المبدأ بالشكل:

$$A' = A'_1 e'_1 + A'_2 e'_2 + A'_3 e'_3 = \sum_{i=1}^3 A'_i e'_i$$

من الواضح أن المركبات  $(A_1, A_2, A_3)$  ترتبط بـ  $(A'_1, A'_2, A'_3)$  بالعلاقة:

$$A'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_j \quad (34-8)$$

وواضح أن مركبات المتجه  $A$  تتحول بشكل مماثل تماما للإحداثيات  $(x_1, x_2, x_3)$ . لذا يعرف المتجه جبريا أنه مجموعة أعداد  $(A_1, A_2, A_3)$  تتحول، كالإحداثيات  $(x_1, x_2, x_3)$ ، وفق القاعدة (27-8) عند دوران منظومة المحاور الإحداثية.

بنفس الشكل نربط بين مركبات ممتد العطالة  $\mathbf{I}$  بالنسبة للمنظومة  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  والمنظومة  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  التي لها نفس المبدأ، بالعلاقة :

$$(35-8) \quad \begin{cases} I'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}'_j = \sum_{k,l} a_{ik} a_{lj} I_{kl} \\ I_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I}' \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{k,l} a_{ik} a_{lj} I'_{kl} \end{cases}$$

حيث تعطي  $a_{nm}$  بالعلاقة:

$$(36-8) \quad a_{nm} = \mathbf{e}'_n \cdot \mathbf{e}_m$$

فالتعريف الجبري الصحيح للممتد هو أنه مجموعة تسعة أعداد  $I_{ij}$  تتحول وفق القاعدة (35-8) عند دوران منظومة المحاور الإحداثية.

### 8-5 تقطير ممتد (جعل ممتد قطرياً) (diagonalization of a tensor)

من المهم جداً في أغلب المسائل المتعلقة بدوران الأجسام الصلبة، البحث عن منظومة محاور إحداثية يكون ممتد العطالة فيها قطرياً، أي حاوياً على الحدود القطرية فقط مع انعدام الحدود غير القطرية. سنحدد فيما يلي الطريقة التي نصل بها الى هذه المنظومة.

إذا افترضنا أن الممتد يعطى بالمصفوفة التالية :

$$(37-8) \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية معينة  $(xyz)$ ،  
كما يعطى بالمصفوفة:

$$(8-38) \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I'_1 & 0 & 0 \\ 0 & I'_2 & 0 \\ 0 & 0 & I'_3 \end{pmatrix}$$

بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية أخرى ( $ox'y'z'$ ) لها نفس المبدأ  $o$ ، يكون  $\mathbf{I}$  فيها قطرياً، عندئذ نلاحظ أنه إذا كان  $\mathbf{A}$  متجهاً موازياً لأحد المحاور  $ox'$  أو  $oy'$  أو  $oz'$ ، وليكن  $ox'$  مثلاً، عندئذ يكون:

$$(8-39) \quad \mathbf{A} = A \mathbf{e}'_1$$

من ثم:

$$(8-40) \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = I'_1 A \mathbf{e}'_1 = I'_1 \mathbf{A}$$

من الواضح أن (8-40) ستكون صحيحة إذا كان  $\mathbf{A}$  يوازي  $oy'$  أو  $oz'$  إلا أننا سنحصل على  $I'_2$  أو  $I'_3$ ، على الترتيب. لذلك إذا أردنا معرفة اتجاه  $ox'$  أو  $oy'$  أو  $oz'$  بالنسبة للمنظومة القديمة  $xyz$  فما علينا إلا أن نبحث عن متجه يوازي أحد هذه المحاور الجديدة ونكتبه بدلالة مركباته على  $xyz$ ، ثم نبحث عن متجه ثان يوازي محوراً آخر، وهكذا دواليك.

يؤول بنا هذا إلى النظرية الأساسية التالية:

"يمكن جعل أي ممتد قطرياً بتدوير منظومة المحاور  $xyz$  إلى منظومة محاور متعامدة مناسبة  $ox'y'z'$  بحيث أن العناصر القطرية الناتجة للممتد فريدة (*unique*) بغض النظر عن ترتيبها، كما أن المحاور الإحداثية للمنظومة الجديدة وحيدة (بالنسبة لنقطة المبدأ  $o$ ) إلا إذا كانت هناك عناصر قطرية متساوية (أو متفسخة عن بعضها) (*degenerate*)."

تدعى العناصر القطرية الناتجة القيم المميزة (*eigenvalues or characteristic values*)

للممتد، وتدعى المحاور الجديدة للمنظومة الناتجة محاور أساسية (*principal axes*).

لتوضيح هذه النظرية، نفترض أن  $\mathbf{I}$  يعطى بالعلاقة (8-37) بالنسبة للمنظومة  $xyz$

وأن  $\mathbf{A}$  هو متجه ما يوازي أحد المحاور الأساسية التي نبحث عنها، بحيث أنه معطى

بدلالة مركباته على  $oxyz$  بالعلاقة:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3$$

لكن، بما أن  $\mathbf{A}$  يوازي أحد المحاور الأساسية للمتد  $I$ ، عندئذ يكون:

$$I \cdot \mathbf{A} = I' \mathbf{A}$$

أو

$$I \cdot \mathbf{A} - I' \mathbf{A} = 0$$

حيث تدل  $I'$  على القيمة المميزة لـ  $I$  المتعلقة بالمحور الأساس الذي يوازيه  $\mathbf{A}$ .  
بكتابة العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$(I - I') \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (41-8)$$

نحصل على معادلة القيمة المميزة (Eigenvalue Equation).

نحل المعادلة المميزة بأخذ مركباتها على المحاور  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  فنجد:

$$(42-8) \quad \begin{cases} (I_{xx} - I') A_x + I_{xy} A_y + I_{xz} A_z = 0 \\ I_{yx} A_x + (I_{yy} - I') A_y + I_{yz} A_z = 0 \\ I_{zx} A_x + I_{zy} A_y + (I_{zz} - I') A_z = 0 \end{cases}$$

تمثل (42-8) مجموعة معادلات خطية متجانسة بدون طرف ثان ولها حل غير بديهي ( $A_x = A_y = A_z = 0$ ) إذا كان معين (أو محدد) الأمثال معدوماً، أي يجب أن يكون:

$$(43-8) \quad \begin{vmatrix} I_{xx} - I' & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I' & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I' \end{vmatrix} = 0$$

يعطينا حل المعادلة المميزة (secular equation) (8-43) ثلاث قيم لـ  $I$  هي القيم المميزة للمتد  $A$  بالنسبة لمنظومة المحاور الجديدة  $ox'y'z'$  التي نحصل على اتجاهات محاورها بالنسبة لـ  $xyz$  بتعويض أول قيمة لـ  $I$ ، ولتكن  $I_1$  في (8-42) فنجد النسب  $A_x:A_y:A_z$ ، حيث أنه لا يمكن تحديد هذه المركبات بشكل مستقل عن بعضها من مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة (8-42). لذلك يمكن أن نكتب:

$$(8-44) \quad A_1 = A_0 (\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3)$$

بما أن اتجاه  $A_1$ ، وليس طوله، هو المهم لذلك نحدد متجه الوحدة المحمول على امتداده:

$$(8-45) \quad e'_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

هذا هو متجه الوحدة للمحور الجديد  $ox'$  الذي نبحت عنه، وتدل كل من  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  في (8-45) على جيب تمام توجيهه (direction cosines) المحور  $ox'$  بالنسبة لـ  $ox$  و  $oy$  و  $oz$ . بنفس الشكل نعوض القيمة الثانية  $I_2$  لـ  $I$  في (8-42) فنجد  $A_2$  ثم  $e'_2$ ، كذلك نعوض  $I_3$  فنجد  $e'_3$ .

تدعى المتجهات  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  المتجهات المميزة (eigenvectors) للمعادلة (8-41). يمكن البرهان أن جذور المعادلة المميزة (8-43) هي أعداد حقيقية دوماً، كما أن المتجهات المميزة  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  هي متجهات متعامدة (orthogonal) دوماً. بناء على ما تقدم، نكتب  $e'_1$  و  $e'_2$  و  $e'_3$  بدلالة  $e_1$  و  $e_2$  و  $e_3$  بالشكل:

$$(8-46) \quad \begin{cases} e'_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3 \\ e'_2 = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 e_3 \\ e'_3 = \alpha_3 e_1 + \beta_3 e_2 + \gamma_3 e_3 \end{cases}$$

أو

$$(47-8) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{a}) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

حيث يطلق على (a) اسم مصفوفة الدوران (rotation matrix) التي يمكن بواسطتها الانتقال من المنظومة  $xyz$  إلى  $ox'y'z'$ . بالطبع فإن مبادل المصفوفة (a) (أي  $\mathbf{a}'$ ) هي مصفوفة الدوران من  $ox'y'z'$  إلى  $xyz$ . ونلاحظ أن:

$$(48-8) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}' = 1$$

لأن (a) هي مصفوفة متعامدة (orthogonal matrix).

## 8-6 تعليقات أساس على القيم المميزة لمتد

أ - إذا كانت القيم المميزة الثلاث لمتد  $I$  متساوية، أي أن  $I'_1 = I'_2 = I'_3$ ، عندئذ يصبح المتد ثابتاً بالنسبة لمنظومة المحاور الإحداثية الجديدة، إذ نكتبه بالشكل:

$$(49-8) \quad \mathbf{I} = I_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بالتالي فإن أي منظومة محاور  $ox'y'z'$  مبدؤها  $o$ ، هي منظومة محاور أساسية للمتد ونقول إن المتدمتناظر كروياً (spherically symmetric) بالنسبة لـ  $o$ ، لأن الكرة متناظرة بالنسبة لأي منظومة محاور متعامدة مبدؤها مركز الكرة نفسها.

ب - إذا كانت قيمتان مميزتان للمتد متساويتان، أي أن  $I'_1 = I'_2$ ، مثلاً، عندئذ يكون اتجاه المحور الأساس الثالث المتعلق بالقيمة المميزة  $I'_3$  فريداً (unique) ومحدداً بطريقة وحيدة، أما المحورين الأساسيين الآخرين المتعلقين بـ  $I'_1$  و  $I'_2$  فهما أي محورين متعامدين موجودين في مستو عمودي على المحور الأساس الثالث، لأنه إذا كان  $A$  متجهاً موجوداً في مستو كهذا عندئذ يكون:

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}'_1 + A_2 \mathbf{e}'_2$$

من ثم:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} = I'_1 A_1 \mathbf{e}'_1 + I'_2 A_2 \mathbf{e}'_2$$

لكن  $I'_1 = I'_2$  فيكون:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} = I'_1 (A_1 \mathbf{e}'_1 + A_2 \mathbf{e}'_2) = I'_1 \mathbf{A}$$

هذا يعني، بحسب (8-41)، أن  $\mathbf{A}$  يوازي محوراً أساساً للمتدا، وبما أن اختياره كان عشوائياً في المستوي  $\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2$ ، لذلك نقول إن أي محور في هذا المستوي هو محور أساس، ويكون المحور الآخر عمودياً عليه.

ج - إذا كانت القيم المميزة الثلاث مختلفة كلها عن بعضها عندئذ تكون المحاور الأساسية الثلاثة محددة بطريقة فريدة ووحيدة بالنسبة لنقطة المبدأ المعتبرة. أما لو غيرنا نقطة المبدأ فسنجد ثلاثة محاور أساسية جديدة محددة بطريقة وحيدة بالنسبة للمبدأ الجديد، وهكذا.

أخيراً، إذا كان  $\mathbf{n}$  متجه وحدة في نظومة محاور مبدؤها  $O$ ، معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2 + \cos \gamma \mathbf{e}_3$$

حيث  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  جيوب تمام توجيه  $\mathbf{n}$  بالنسبة لـ  $\mathbf{e}_1$  و  $\mathbf{e}_2$  و  $\mathbf{e}_3$  ( $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ) عندئذ نجد مركبات أي ممتد  $\mathbf{l}$  على هذا المتجه من العلاقة:

$$l_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} \quad (8 - 50)$$

## 7-8 نظرية المحاور المتوازية

كتبنا نظرية المحاور المتوازية لعزم عطالة جسم يتحرك في مستو بالشكل:

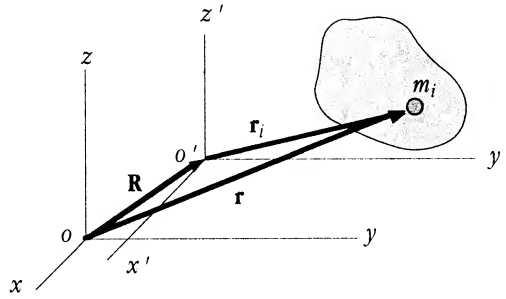
$$I_o = I_{cm} + M R^2$$

حيث  $I_0$  عزم عطالة الجسم حول محور مار من نقطة ما  $O$  بينما  $I_{cm}$  عزم عطالته حول محور مار من مركز كتلته وموازي للمحور الأول. أما  $M$  فهي كتلة الجسم و  $R$  المسافة العمودية بين المحورين.

في حالة الحركة الدورانية العامة لجسم صلب حول نقطة، نكتب نظرية المحاور المتوازية بالنسبة لممتد العطالة مباشرة، إذا لاحظنا أنه إذا نقلنا مبدأ منظومة المحاور من  $O$  إلى مركز الكتلة بحيث تكون محاور المنظومة الجديدة موازية لمحاور المنظومة القديمة، وعندئذ نحدد موضع أي كتلة عنصرية  $m_i$  من الجسم بالمتجه  $\mathbf{r}_i$  حيث نلاحظ من الشكل (4-8) أن:

(51 - 8)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$$



الشكل (4-8)

لذلك يصير ممتد العطالة معطى بالمعادلة:

$$I_0 = \sum m_i [(\mathbf{r}'_i + \mathbf{R})^2 \mathbf{1} - (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R})(\mathbf{r}'_i + \mathbf{R})]$$

أو

$$I_0 = \sum m_i [(\mathbf{r}'_i{}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i) - (\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R} \mathbf{R}) + 2 \mathbf{R} \bullet \mathbf{r}'_i \mathbf{1} - \mathbf{R} \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_i \mathbf{R}]$$

لكن

$$\sum m_i (\mathbf{r}'_i{}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i) = I_{cm}$$



هو عزم عطالة الجسم بالنسبة لمركز الكتلة، كما أن :

$$\sum m_i (\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R} \mathbf{R}) = M (\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R} \mathbf{R})$$

حيث  $M$  كتلة الجسم كله، أما الحد الأخير فهو:

$$(2\mathbf{R} \cdot \sum m_i \mathbf{r}_i') \mathbf{1} - (\sum m_i \mathbf{r}_i') \mathbf{R} - \mathbf{R} \sum m_i \mathbf{r}_i' = 0$$

لأن المجموع  $\sum m_i \mathbf{r}_i'$  يحدد موضع مركز الكتلة للجسم الذي اعتبرناه مبدأً لمنظومة الإحداثية الجديدة، أي أنه في الموضع  $(0,0,0)$ . من ثم نجد أن:

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_{cm} + M (\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R} \mathbf{R}) \quad (52-8)$$

لنظرية المحاور المتوازية أهمية كبيرة إذ أنه كثيرا مايكون من السهل حساب مركبات ممتد عطالة جسم صلب بالنسبة لمنظومة محاور مبدؤها مركز الكتلة، إلا أن الجسم يتحرك بشكل تبقى فيه نقطة أخرى ثابتة في مكانها، لذلك يفضل في هذه الحالة وضع مبدأ منظومة المحاور عند هذه النقطة، عندئذ نستعمل (51-8) لإيجاد مركبات ممتد العطالة بالنسبة لهذه المنظومة الجديدة.

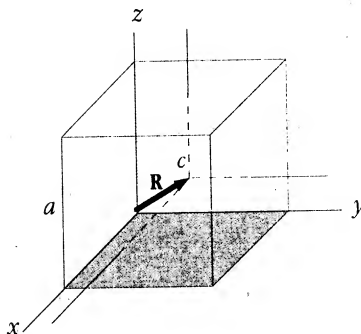
## 8 - 8 مثل توضيحي

لنوجد ممتد عطالة جسم صلب على شكل مكعب كتلته  $m$  طول ضلعه  $a$  حول منظومة محاور مبدؤها إحدى زوايا المكعب، تنطبق محاورها على أضلاعه الثلاثة، كما في الشكل (5-8)، ولنقطر هذا الممتد ونحدد المحاور الأساسية له. ثم نكتب مصفوفة الدوران من المنظومة القديمة إلى المحاور الأساسية. أخيراً نكتب ممتد العطالة للمكعب بالنسبة لمنظومة محاور مبدؤها مركزه ومحاورها توازي أضلاعه. أ - نحسب أولاً مركبات ممتد العطالة بالنسبة لـ  $xyz$  فنكتب الحدود القطرية (*diagonal elements*) أولاً:

$$I_{xx} = \int_M (y^2 + z^2) dm = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{2}{3} m a^2 = \frac{1}{12} (8 m a^2)$$

حيث وضعنا:

$$m = \rho a^3$$



الشكل (5-8)

بنفس الشكل تماماً:

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{12} (8 m a^2)$$

أما الحدود غير القطرية (off-diagonal elements) فهي:

$$I_{xy} = I_{yx} = -\rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a xy dx dy dz = -\frac{1}{4} m a^2 = \frac{1}{12} (-3 m a^2)$$

كذلك:

$$I_{yz} = I_{zy} = I_{xz} = I_{zx} = \frac{1}{12} (-3 m a^2)$$

لذلك نكتب ممتد العطالة بالشكل:

$$(1) \quad \mathbf{I}_0 = \frac{m a^2}{12} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

ب - نقوم الآن بتقطير الممتد، فنفترض أن  $A$  هو متجه يوازي أحد المحاور الأساسية للمكعب، بالنسبة للنقطة  $O$ ، فيكون:

$$I_0 \cdot A = I' A$$

حيث  $I'$  القيمة المميزة للممتد المقابلة للمحور الأساسي المفترض.  
بكتابة المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$(I_0 - I' \mathbf{1}) \cdot A = 0$$

وأخذ مركباتها على  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  نجد:

$$(2) \quad \begin{cases} (8 - I')A_x - 3A_y - 3A_z = 0 \\ -3A_x (8 - I')A_y - 3A_z = 0 \\ -3A_x - 3A_y (8 - I')A_z = 0 \end{cases}$$

حيث أسقطنا الحد  $ma^2/12$  آنياً ونعود لكتابته في النهاية.  
نلاحظ أن (2) تمثل مجموعة معادلات خطية متجانسة ولا تقبل حلاً غير بديهي إلا إذا كان:

$$\begin{vmatrix} (8 - I')A_x - 3A_y - 3A_z \\ -3A_x (8 - I')A_y - 3A_z \\ -3A_x - 3A_y (8 - I')A_z \end{vmatrix} = 0$$

بفك هذا المعين (أو المحدد *determinent*) نجد:

$$I'^3 - 24I'^2 + 165I' - 242 = 0$$

لحل المعادلة الأخيرة، نجد (بالتجربة) أن أحد الجذور هو  $I'=2$ ، فنقسم المعادلة على  $(I'-2)$  فنجد:

$$(I' - 2)(I'^2 - 22I' + 121) = (I' - 2)(I' - 11)^2 = 0$$

من ثم فالجذور الثلاثة هي  $I_1 = I_2 = 11$  و  $I_3 = 2$ .

لذلك نكتب ممتد العطالة بالنسبة لمنظومة المحاور الأساسية بالشكل:

$$I_0 = \frac{m a^2}{12} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

إن كون  $I_1 = I_2$  يجعل المحور  $oz'$  الجديد محور تناظر للجسم بينما  $ox'$  و  $oy'$  أي محورين متعامدين واقعين في مستو عمودي على  $oz'$ .

لإيجاد اتجاهات هذه المحاور الجديدة نعوض  $I_3$  في المعادلات (2) فنجد:

$$3(2A_x - A_y - A_z) = 0$$

$$3(-A_x + 2A_y - A_z) = 0$$

$$3(-A_x - A_y + 2A_z) = 0$$

ب طرح الأولى من الثانية نجد  $A_x = A_y$  وبالتعويض في الثالثة نجد أن  $A_z = A_y$ .  
لذلك نكتب المتجه  $A$  بالشكل:

$$A = A_x (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

من ثم فإن متجه الوحدة المحمول عليه هو:

$$\mathbf{k}' = \frac{A}{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

أي أنه محمول على قطر المكعب البادئ من النقطة  $O$ .

لإيجاد  $i'$  و  $j'$  نعوض  $I_1$  أو  $I_2$  في (2) فنجد  $0=0$ , أي أن مركبات  $i'$  و  $j'$  إختيارية

طالما أنهما يقعان في مستو عمودي على  $\mathbf{k}'$  ومتعامدان مع بعضهما بنفس الوقت.

إذا افترضنا أن  $i'$  يقع في المستوي  $xy$ , أي أن:

$$i' = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$$

بما أن  $\mathbf{i}' \bullet \mathbf{k}' = 0$  و  $|\mathbf{i}' \times \mathbf{k}'| = 1$  نجد:

$$\alpha + \beta = 0$$

و

$$\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha - \beta)^2 = 1$$

بحل المعادلتين السابقتين نجد:

$$\alpha = -\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

أي أن:

$$\mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

أخيراً، لإيجاد  $\mathbf{j}'$  نكتب أن:

$$\mathbf{k}' \times \mathbf{i}' = \mathbf{j}'$$

فنجد:

$$\mathbf{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

نستنتج من  $\mathbf{i}'$  و  $\mathbf{j}'$  و  $\mathbf{k}'$  أن مصفوفة الدوران من  $\mathbf{ijk}$  إلى  $\mathbf{i'j'k'}$  هي:

$$(a) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

يمكن اعتبار هذا الدوران مؤلف من دورانين: الأول حول  $oz$  بزاوية  $45^\circ$  والثاني

حول  $oy'$  بزاوية  $\theta$  معطاة بالعلاقة:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

للقارئ أن يتأكد من أن حاصل ضرب مصفوفة الدوران الأول بمصفوفة الدوران الثاني سيعطي (a) المذكورة أعلاه.

بالطبع يمكن الحصول على (a) (لو عرفناها مسبقاً) من (8-35) بوضع:

$$I'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} I_{kl}$$

جـ - أخيراً: نحسب ممتد عطالة المكعب بالنسبة لمنظومة محاور مبدؤها مركز كتلته ومحاورها توازي أضلاعه. فنستخدم نظرية المحاور المتوازية ونكتب:

$$(4) \quad I_o = I_{cm} + m(R^2 \mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R})$$

أو

$$I_{cm} = I_o - m(R^2 \mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R})$$

حيث  $\mathbf{R}$  متجه من  $O$  إلى مركز الكتلة، أي أن:

$$\mathbf{R} = \frac{a}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

ومنه:

$$\mathbf{R}\mathbf{R} = \frac{a^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

بالتعويض في (4) نجد:

$$(5) \quad I_{cm} = \frac{m a^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نستدل من كون  $I$  قطرياً أن المحاور  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  التي اخترناها هي محاور أساسية، كما أن كون القيم المميزة الثلاثة متساوية يعني أن المكعب متناظر كروياً بالنسبة لمركز كتلته. أي أن المكعب هو كرة ! بالطبع إن هذا يعني أنه لا يمكن الحكم على الشكل الهندسي لجسم صلب من ممتد عطالته فقط في حالة كون هذا الممتد ثابتاً، لأن المعلومات الناتجة عنه غير كافية في هذه الحالة.

## 8 - 9 الطاقة الحركية لجسم صلب ومخروط العطالة الدوراني

نعتبر جسماً صلباً يدور حول نقطة ثابتة  $C$  بسرعة زاوية  $\omega$  ونكتب طاقته الحركية:

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)^2 \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i (\omega \times \mathbf{r}_i) \cdot (\omega \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i \omega \cdot [\mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i)] \end{aligned}$$

أي أن:

$$(8-53) \quad T = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{I} \cdot \omega$$

فإذا كان  $I$  معطى بالعلاقة (8-39) و  $\omega$  محدد بمركباته  $\omega_x$  و  $\omega_y$  و  $\omega_z$  لوجدنا:

$$(8-54) \quad T = \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{yz} \omega_y \omega_z + I_{zx} \omega_z \omega_x$$

نلاحظ من (8-54) أنه من أجل طاقة حركية ثابتة ما فإن  $\omega$  تتغير بحيث تبقى هذه العلاقة محققة. فإذا كتبنا بالشكل:

$$(55-8) \quad \omega = \omega (\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k})$$

لأصبحت  $T$  معطاة بالعلاقة:

$$(56-8) \quad T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

حيث وضعنا:

$$(57-8) \quad I = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma + \\ 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha$$

فإذا عرفنا المتجه:

$$(58-8) \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{I}} (\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}) \equiv \rho_x \mathbf{i} + \rho_y \mathbf{j} + \rho_z \mathbf{k}$$

وعوضنا في (57-8) لوجدنا:

$$(59-8) \quad I_{xx} \rho_x^2 + I_{yy} \rho_y^2 + I_{zz} \rho_z^2 + 2I_{xy} \rho_x \rho_y \\ + 2I_{yz} \rho_y \rho_z + 2I_{xy} \rho_x \rho_y + 2I_{zx} \rho_z \rho_x = 0$$

نلاحظ أن المعادلة (59-8) تمثل معادلة مجسم قطع ناقص (*ellipsoid*) في الفضاء يدعى هذا المجسم مجسم قطع العطالة (*ellipsoid of inertia* أو *momental ellipsoid*). من الواضح أنه إذا إنتقلنا إلى منظومة المحاور الأساسية لمتد العطالة لأصبحت معادلة مجسم قطع العطالة على الشكل:

$$(60-8) \quad I_1 \rho_1^2 + I_2 \rho_2^2 + I_3 \rho_3^2 = 1$$

حيث تدل  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  على الإحداثيات في المحاور الجديدة.

نلاحظ من (60-8) أنه إذا كانت هناك قيمتان مميزتان متساويتان لمتد العطالة

لأصبحت معادلة المخروط على الشكل:



$$(61-8) \quad I_1(\rho_1^2 + \rho_2^2) + I_3\rho_3^2 = 1$$

هذا يظهر بوضوح تناظر الجسم حول المحور الثالث. أما إذا كانت القيم الثلاث متساوية لأصبحت معادلته مكافئة لمعادلة كرة .

## 10 - 8 الحركة العامة للأجسام الصلبة

توصف الحركة العامة لجسم صلب في الفضاء بقوانين نيوتن في الحركة :

$$(62-8) \quad \mathbf{F}_T = \frac{d\mathbf{P}_{c.m.}}{dt}$$

$$(63-8) \quad \boldsymbol{\tau}_T = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

$$(64-8) \quad \mathbf{P}_{c.m.} = M \mathbf{v}_{c.m.}$$

$$(65-8) \quad \mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

تصف المعادلتان (62-8) و (64-8) الحركة الإنتقالية لنقطة واحدة من الجسم، هي مركز كتلته، بينما تصف (63-8) و (65-8) الحركة الدورانية لجسم حول نقطة مناسبة. من الواضح أن هناك تشابهاً بين هاتين المجموعتين من المعادلات إلا أن هناك فروقاً أساسية أهمها أن  $M$  في (64-8) هي كمية عددية، لذا فإن  $\mathbf{P}_{c.m.}$  توازي  $\mathbf{v}_{c.m.}$  دوماً. أما  $\mathbf{I}$  في (65-8) فتمثل ممتد العطالة للجسم الصلب وتطبيقه على  $\boldsymbol{\omega}$  لايعطي متجهاً موازياً لهذا الأخير بالضرورة. ولذلك فإن  $\mathbf{L}$  لا يوازي  $\boldsymbol{\omega}$  دائماً.

من جهة أخرى، فإن كون  $M$  كمية عددية يعني أنها لن تتغير ولن تتأثر بحركة الجسم، أما  $\mathbf{I}$  فإن له مركبات منسوبة لمنظومة محاور إحداثية ثابتة، وعندما يتحرك الجسم الصلب تتغير قيم هذه المركبات مما يجعل كتابة قانون نيوتن الثاني بشكله (63-8) ووضع  $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$  غير مناسب في هذا المقام لكون كل من  $\mathbf{I}$  و  $\boldsymbol{\omega}$  متغيراً مع الزمن. لذلك فإنه من الأفضل البحث عن طريقة أكثر ملائمة لصياغة (63-8) بحيث تبقى مركبات  $\mathbf{I}$  ثابتة مع مرور الزمن مما يجعل إمكانية حل هذه المعادلة أكثر واقعية، وهذا ما نقوم به في الفقرة التالية .

## 8 - 11 معادلات أولر (Euler's Equations)

ذكرنا في الفقرة السابقة أنه عندما يدور جسم صلب فإن مركبات ممتد العطالة  $I$  بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية ثابتة في الفضاء  $OXYZ$ ، التي نكتب المعادلات الأربع من (8-62) إلى (8-65) أعلاه بالنسبة لها دوماً، تتغير مع حركة الجسم. لذلك سنربط بالجسم منظومة محاور إحداثية  $oxyz$ ، لها نفس مبدأ المنظومة الثابتة وهذا يؤهل بنا إلى ما وجدناه في الفصل السابع عندما درسنا كيفية تغير قوانين نيوتن عند الانتقال إلى منظومة محاور دوارة، حيث نعالج في هذه الفقرة الصيغة التي ينتهي إليها قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية عن دوران المحاور. فإذا كان  $L$  هو الزخم الزاوي للجسم الصلب بالنسبة لـ  $OXYZ$ ، عندئذ يكون:

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

و

$$L = I \cdot \omega$$

حيث  $\omega$  السرعة الزاوية التي يدور بها الجسم حول  $O$ ، كما يدل الرمز  $d/dt$  على أن الاشتقاق يتم بالنسبة لمنظومة المحاور الثابتة. بالاستفادة من العلاقة (7-21) نجد:

$$\frac{dL}{dt} = \dot{L} + \omega \times L \quad (8-66)$$

حيث يدل الرمز  $\dot{L}$  على أن مشتق  $L$  هو بالنسبة لمنظومة المحاور المتحركة مع الجسم الصلب، لذلك يكون:

$$\tau = \dot{L} + \omega \times L \quad (8-67)$$

بإختيار منظومة محاور الجسم (*Body-Fixed axes*) المتحركة لتتنطبق على المحاور الأساسية له، وهذا منطقي تماماً طالما أننا سنربط بالجسم منظومة محاور،

فالأجدر أن نختار تلك التي تجعل الحسابات والمعادلات أيسر وأسهل للحل والمحاور الأساسية هي أفضل إختيار. من ثم نكتب:

$$(68-8) \quad \mathbf{l} = I_x \mathbf{i}\mathbf{i} + I_y \mathbf{j}\mathbf{j} + I_z \mathbf{k}\mathbf{k}$$

و

$$(69-8) \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

ومنه

$$(70-8) \quad \mathbf{L} = \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = I_x \omega_x \mathbf{i} + I_y \omega_y \mathbf{j} + I_z \omega_z \mathbf{k}$$

و

$$(71-8) \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{l} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = I_x \dot{\omega}_x \mathbf{i} + I_y \dot{\omega}_y \mathbf{j} + I_z \dot{\omega}_z \mathbf{k}$$

حيث نلاحظ أن مشتقات  $I_x$  و  $I_y$  و  $I_z$  تساوي الصفر بالنسبة لمنظومة المحاور المتحركة مع الجسم  $xyz$ .  
من جهة أخرى فإن:

$$(72-8) \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = (I_z - I_x) \omega_z \omega_y \mathbf{i} + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z \mathbf{j} + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x \mathbf{k}$$

لذلك نجد أن مركبات العلاقة (67-8) على المحاور  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  (محاور الجسم) هي:

$$(73-8) \quad \begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_z \omega_y = \tau_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = \tau_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x = \tau_z \end{cases}$$

تدعى العلاقات (73-8) **معادلات أولر (Euler's Equations)** وتستعمل لدراسة تغيرات السرعة الزاوية للجسم الصلب بالنسبة لمحاور الجسم، إذا عرفنا مركبات العزوم الخارجية المؤثرة على هذا الجسم وعناصر ممتد عطالته على هذه المحاور.

ينبغي ألا ننسى أن الجسم يتحرك ككل في الفضاء، مما يعني أن محاور الجسم تتحرك بشكل ما ولا يمكن الاستفادة من معادلات أولر لمعرفة منحى الجسم في الفضاء.

بذلك نكون قد بدلنا المسألة المطروحة بين أيدينا، وهي تحديد موضع الجسم واتجاهاته في الفضاء في كل لحظة، بمسألة أخرى تتعلق بتحديد سرعته الزاوية وزخمه الزاوي بالنسبة لمحاور تدور معه بشكل مستمر. بالطبع فإن الحل النهائي المنشود في الميكانيك هو حل المسألة الأولى الأساس، إلا أننا حالياً ندرس المتغيرات التحريكية للجسم الصلب من وجهة نظر مراقب يدور معه ومرتبطة بمحاور الجسم. ننوه هنا إلى أنه إذا دار الجسم بحيث بقيت إحدى نقاطه ثابتة في مكانها فإننا نعتبرها مبدأً لمحاور الجسم ونحسب مركبات كل من  $\omega$  و  $\tau$  بالنسبة لها. أما إذا كانت حركة الجسم غير مقيدة على الإطلاق، عندئذ يفضل إتخاذ مركز الكتلة مبدأً هذه المحاور وحساب مركبات الكميات السابقة بالنسبة لها.

## 8 - 12 دوران جسم صلب بسرعة زاوية ثابتة

نلاحظ من معادلات أولر أنه لا يمكن لجسم صلب أن يدور بسرعة زاوية ثابتة حول محور دون تطبيق عزم خارجي على هذا الجسم إلا إذا كان هذا المحور محوراً أساسياً لأنه إذا كان  $\omega$  ثابتاً عندئذ يكون  $d\omega/dt = 0$  أي أن  $L = 0$ ، لذا تقول (8-67) إلى:

$$\omega \times (I \cdot \omega) = \tau$$

فإذا أردنا أن تكون  $\tau = 0$  يجب أن يكون  $\omega$  موازياً لـ  $I \cdot \omega$  وهذا لا يتم إلا إذا كان  $\omega$  موازياً لأحد المحاور الأساس للجسم الصلب.

لذلك إذا أردنا جعل دولاب مثلاً يدور بشكل حر بدون تطبيق أي قوة أو عزم خارجي عليه، وجب علينا جعله في حالة إتزان تحريكي، كما يجب أن يكون محور الدوران منطبقاً على أحد محاوره الأساسية، كما هو معروف لأي ميكانيكي جيد.

لا ننسى أن نشير إلى أن التعليق السابق يخص جسماً صلباً ليس له محور تناظر. أما إذا كان للجسم محور تناظر فسندرس في فقرة لاحقة بشكل واف.

## 8 - 13 الطاقة الحركية ومعادلات أولر

لنضرب طرفي العلاقة (67-8) عددياً بـ  $\omega$  فنجد:

$$(74-8) \quad \omega \cdot \tau = \omega \cdot (\dot{L} + \omega \times L)$$

لكن:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$$

كما أن:

$$\omega \cdot (\omega \times L) = 0$$

ونظراً لأن  $I$  ممتد متناظر لذا يكون:

$$(75-8) \quad \omega \cdot L \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot I \cdot \omega$$

للقارئ أن يبرهن صحة العلاقة السابقة من أجل أي ممتد متناظر  $T$  وأي متجهين  $A$  و  $B$ . من ثم تصبح المعادلة (74-8) على الشكل:

$$\omega \cdot \tau = \left[ \frac{1}{2} \omega \cdot I \cdot \omega \right]'$$

حيث نلاحظ أن عملية الاشتقاق للقوس كله تتم بالنسبة لمحاور الجسم التي يكون  $I$  ثابتاً بالنسبة لها.

بحسب (53-8) فإن مداخل القوسين في الطرف الأيمن من العلاقة السابقة هو الطاقة الحركية للجسم الصلب، أي أن المعادلة (53-8) تصبح:

$$(76-8) \quad \omega \cdot \tau = \frac{dT}{dt} = \dot{T}$$

حيث وضّحنا صراحة أن اشتقاق  $T$  هو نفسه بالنسبة لمحاور الفضاء الثابتة أو بالنسبة لمحاور الجسم لأن  $T$  كمية عددية.

## 9 - 14 الحل العام لمعادلات أولر لجسم متناظر غير خاضع لعزوم خارجية

إذا تحرك جسم صلب في الفضاء بحيث كانت محصلة العزوم الخارجية المؤثرة عليه مساوية للصفر، عندئذ نقول إنه يدور بشكل حر. أبسط مثل على ذلك أن نقذف كتاباً في الهواء نحو الأعلى، أو نراقب لاعب السيرك الماهر الذي يترك عدة أطباق تدور على نهايات قضبان رفيعة متمركزة عند مركز كتلة كل طبق، حيث تكون القوى المؤثرة على الجسم في كل من الحالتين السابقتين مارة من نقطة دورانه أو من مركز كتلته. بالتالي فعزمها حول هذه النقطة أو المركز معدوم، وتصبح معادلات أولر على الشكل:

$$(77-8) \quad \begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_z \omega_y = 0 \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = 0 \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x = 0 \end{cases}$$

فإذا افترضنا أن الجسم الصلب متناظر حول المحور  $oz$ ، عندئذ يكون:

$$I_x = I_y$$

وتصير المعادلة الثالثة من (77-8) على النحو:

$$I_z \dot{\omega}_z = 0$$

أي أن:

$$\omega_z = \text{ثابت}$$

كما تعطي المعادلتان الأولى والثانية من (77-8):

$$\dot{\omega}_x + \left[ \frac{(I_z - I_x)}{I_x} \omega_x \right] \omega_y = 0$$

$$\dot{\omega}_y - \left[ \frac{(I_z - I_x)}{I_x} \omega_z \right] \omega_x = 0$$

بفرض أن  $I_z > I_x$  ووضع

$$(78-8) \quad \Omega = \frac{(I_z - I_x)}{I_x} \omega_z$$

نجد:

$$\dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0$$

و

$$\dot{\omega}_y - \Omega \omega_x = 0$$

باشتقاق الأولى والإستفادة من الثانية نجد:

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2 \omega_x = 0$$

ومنه:

$$(79-8) \quad \begin{cases} \omega_x = \omega_0 \cos(\Omega t + \phi) \\ \omega_y = \omega_0 \sin(\Omega t + \phi) \end{cases}$$

أي أن:

$$(80-8) \quad \omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_0^2 = \text{ثابت}$$

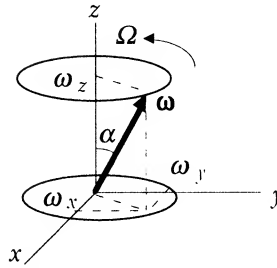
أي تتغير  $\omega_x$  و  $\omega_y$  بشكل جيبى مع الزمن بسرعة زاوية  $\Omega$  كوينهما فرق في الطور بمقدار  $\pi/2$ . فمركبة  $\omega$  على المستوى  $xy$  ترسم دائرة نصف قطرها  $\omega_0$  بسرعة زاوية  $\Omega$  كما في الشكل (6-8)، وتكون جهة دوران هذه المركبة باتجاه  $k$  إذا كانت  $\Omega > 0$ ، أي إذا كان  $I_z > I_x$ ، أو معاكسة لـ  $k$  إذا كان  $\Omega < 0$  أي  $I_z < I_x$ ، في كلتا الحالتين يكون متجه السرعة الزاوية  $\omega$  هو:

$$(81 - 8) \quad \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega_0^2 = \text{ثابت}$$

فيرسم  $\omega$  يرسم مخروطاً دورانياً بالنسبة لمحاور الجسم تعطى نصف زاويته الرأسية  $\alpha$  بالعلاقة:

$$(82 - 8) \quad \tan \alpha = \frac{\omega_0}{\omega_z}$$

يدعى هذا المخروط مخروط الجسم (body cone).



الشكل (6-8)

أما حركة الجسم بالنسبة لمحاور الفضاء الثابتة، فنجدها بتحديد موضع  $\omega$  بالنسبة لإتجاه ثابت في الفضاء.

فإذا لاحظنا أن  $\tau = 0$  وأن  $\tau = dL / dt$  نستنتج:

$$(83 - 8) \quad L = \text{ثابت}$$

فالزخم الزاوي للجسم الصلب ثابت قيمة واتجاهاً في الفضاء دوماً، لذلك سنحدد موضع  $\omega$  بالنسبة له. فنلاحظ أن الزاوية بينهما  $\beta$  تعطى بالعلاقة:

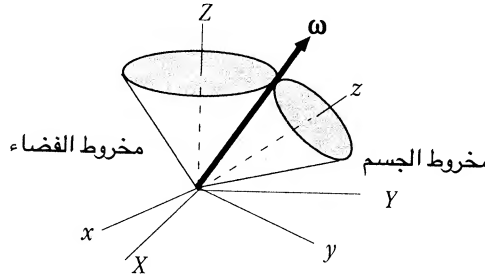
$$(84 - 8) \quad \cos \beta = \frac{\omega \cdot L}{\omega L} = \frac{\omega \cdot I \cdot \omega}{\omega L} = \frac{2T}{\omega}$$

لكن  $\omega$  و  $L$  ثابتان بالقيمة، كما أن  $T$  ثابتة بحسب العلاقة (76-8) حيث أن:



$$\omega \cdot \tau = \frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow T = \text{ثابت}$$

من ثم فإن  $\beta$  ثابتة أيضاً مما يعني أن  $\omega$  يرسم مخروطاً حول  $L$  نصف زاويته الرأسية هي  $\beta$ . يدعى هذا المخروط مخروط الفضاء (space cone). هناك إذاً مخروطان يرسمهما محور الدوران  $\omega$ ، أحدهما ثابت في الفضاء محوره  $L$ ، وثانيهما دوّار محوره هو محور تناظر الجسم  $oz$  بحيث أن  $\omega$  هو خط تماس هذين المخروطين دوماً، كما هو موضح في الشكل (7-8).



الشكل (7-8)

يمكن معرفة فيما إذا كان مخروط الجسم يتدحرج داخل أو خارج مخروط الفضاء بمقارنة الزاوية التي يصنعها  $\omega$  مع محور تناظر الجسم التي رمزنا لها بـ  $\alpha$  مع تلك التي يصنعها متجه الزخم الزاوي الثابت  $L$  مع هذا المحور التي سنرمز لها بـ  $\theta$ .

لذلك نختار منظومة محاور الفضاء بحيث ينطبق فيها  $L$  على  $oz$ ، بينما نختار منظومة محاور الجسم بحيث ينطبق فيها  $oz$  على محور تناظر الجسم ويكون  $ox$  عمودياً على  $L$  لأن  $ox$  و  $oy$  هما أي محورين واقعين في مستو عمودي على  $oz$  لأن الجسم متناظر حول محور. فإذا كانت  $\theta$  هي الزاوية بين  $L$  و  $oz$  عندئذ يكون:

$$L_x = I_x \omega_x = 0$$

و

$$L_y = I_y \omega_y = L \sin \theta$$

$$L_z = I_z \omega_z = L \cos \theta$$

بالتالي نجد أن:

$$\frac{L_y}{L_z} = \tan \theta = \frac{I_y}{I_z} \frac{\omega_y}{\omega_z}$$

لكن

$$\omega = \omega \sin \alpha \mathbf{j} + \omega \cos \alpha \mathbf{k}$$

لذلك يكون:

$$\frac{\omega_y}{\omega_z} = \tan \alpha$$

أي أن:

$$\tan \theta = \frac{I_y}{I_z} \tan \alpha \quad (85-8)$$

فإذا كان  $I_y > I_z$  عندئذ يكون  $\theta > \alpha$  أي أن مخروط الجسم يقع خارج مخروط الفضاء ويتدرج على سطحه الخارجي. أما إذا كان  $I_y < I_z$  فإن  $\theta < \alpha$  أي أن مخروط الجسم يحتوي مخروط الفضاء ويتدرج حوله. في كلتا الحالتين فإن خط تماس المخروطين يبقى متجه السرعة الزاوية  $\omega$ . (انظر الشكل (7-8)).

## 9-15 الدوران الحر لجسم صلب غير متناظر والإتزان الديناميكي

سنعتبر الآن حل معادلات أولر لجسم صلب غير متناظر يدور بشكل حر، ونفترض أن الجسم كان يدور مبدئياً حول أحد محاوره الأساس ثم اهتز فجأة ليدير بشكل ما ليصير لمتجه سرعته الزاوية مركبات حول محاوره الأساس الثلاثة. سندرس شرط استقرار الدوران حول المحور الأساس الذي كان يدور حوله أصلاً، بمعنى أن سرعته الزاوية حول المحورين الآخرين ستبقى صغيرة ومحددة.

فإذا افترضنا أن متجه السرعة الزاوية للجسم كان معطى مبدئياً بالعلاقة:

$$\omega = \omega_x \mathbf{i}$$

ثم صار فجأة:

$$\omega = \omega_x \mathbf{i} + \alpha \mathbf{j} + \beta \mathbf{k}$$

حيث نعتبر المركبتين  $\alpha$  و  $\beta$  صغيرتين لدرجة يمكن إهمال  $\alpha^2$  و  $\beta^2$  بالمقارنة مع  $\omega_x$ .  
بكتابة أولى معادلات أولر نجد:

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_z \omega_y = 0$$

ولكن  $\omega_y = \alpha$  و  $\omega_z = \beta$ ، وبإهمال الحد  $\alpha\beta$  نجد أن المعادلة السابقة تعطي:

$$I_x \dot{\omega}_x = 0$$

أي أن:

$$\omega_x = \text{ثابت}$$

أما معادلتى أولر الثانية والثالثة فتعطيان:

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = 0$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x = 0$$

بتعويض  $\omega_y$  و  $\omega_z$  بقيمتيهما وملاحظة أن  $\omega_x$  ثابت، نجد بإشتقاق الأولى والاستفادة من الثانية أن:

$$\ddot{\alpha} + \Omega^2 \alpha = 0$$

حيث وضعنا:

$$\Omega^2 = \frac{(I_x - I_z)(I_x - I_y)}{I_y I_z} \quad (8-86)$$

فإذا افترضنا أن متجه السرعة الزاوية للجسم كان معطى مبدئياً بالعلاقة:

$$\omega = \omega_x \mathbf{i}$$

ثم صار فجأة:

$$\omega = \omega_x \mathbf{i} + \alpha \mathbf{j} + \beta \mathbf{k}$$

حيث نعتبر المركبتين  $\alpha$  و  $\beta$  صغيرتين لدرجة يمكن إهمال  $\alpha^2$  و  $\beta^2$  بالمقارنة مع  $\omega_x$ .  
بكتابة أولى معادلات أولر نجد:

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_z \omega_y = 0$$

ولكن  $\omega_z = \beta$  و  $\omega_y = \alpha$ ، وبإهمال الحد  $\alpha\beta$  نجد أن المعادلة السابقة تعطي:

$$I_x \dot{\omega}_x = 0$$

أي أن:

$$\omega_x = \text{ثابت}$$

أما معادلتى أولر الثانية والثالثة فتعطين:

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = 0$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x = 0$$

بتعويض  $\omega_y$  و  $\omega_z$  بقيمتهما وملاحظة أن  $\omega_x$  ثابت، نجد بإشتقاق الأولى والاستفادة من الثانية أن:

$$\ddot{\alpha} + \Omega^2 \alpha = 0$$

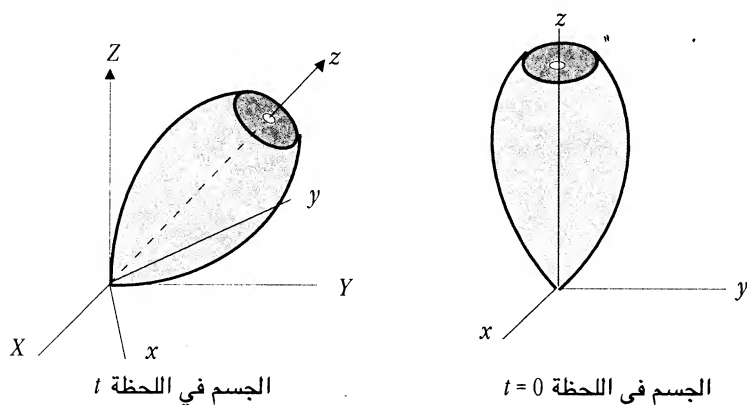
حيث وضعنا:

$$\Omega^2 = \frac{(I_x - I_z)(I_x - I_y)}{I_y I_z} \quad (8-86)$$

فإذا أردنا أن تبقى  $\alpha$  محدودة، وهذا ما نسميه عادة بالإستقرار (stability)، عندئذ يجب أن يكون  $\Omega^2 > 0$ ، أي أنه إما أن يكون  $I_x > I_y$  و  $I_x > I_z$  أو أن يكون  $I_x < I_y$  و  $I_x < I_z$ . الآن: حتى يدور جسم صلب حول محور بشكل مستقر، يجب أن يكون هذا المحور محوراً أساسياً، كما يجب أن يكون عزم عطالة الجسم حول هذا المحور أكبر أو أصغر عزم عطالة له بالمقارنة مع المحورين الأساسيين الآخرين. هذا ما يدعى بالإتزان الديناميكي.

## 8-16 وصف دوران الجسم الصلب في الفضاء - زوايا أولر (Euler's angles)

لقد درسنا في الفقرات السابقة كيف يتغير متجه السرعة الزاوية والزخم الزاوي لجسم صلب بالنسبة لمحاور الجسم دون أن نغير انتباهاً لوضعية الجسم في الفضاء. لكن مهمة الميكانيك الأساسية دوماً هي تحديد موضع وسرعة وتسارع أي جسم مادي بالنسبة لمحاور فضائية ثابتة. لذلك سنقوم في هذه الفقرة بوصف منحى جسم صلب يتحرك بشكل دوراني في الفضاء بوساطة ثلاثة زوايا تنقل منظومة المحاور الإحداثية من محاور الفضاء الثابتة (التي نفترض أن محاور الجسم كانت منطبقة عليها في لحظة ما) إلى محاور الجسم في أي لحظة زمنية تالية. ويمثل الشكل (8-8) حالة الجسم والمحاور الثابتة والمتحركة لحظة البداية وفي أي زمن آخر.



الشكل (8-8)

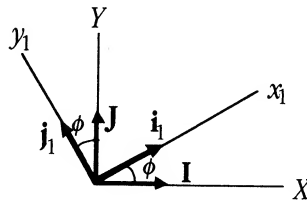
نقوم فيما يلي بالانتقال من المنظومة الثابتة (الوضع الابتدائي للجسم) إلى منظومة محاور الجسم المتحركة (الوضع الآني للجسم) بواسطة ثلاثة دورانات متعاقبة على النحو الآتي:

أ - ندور منظومة المحاور حول  $oZ$  بزاوية  $\phi$  فنحصل على منظومة جديدة  $x_1y_1z_1$  ينطبق فيها  $oz_1$  على  $oZ$ ، بينما يصنع  $ox_1$  زاوية  $\phi$  مع  $oX$ ، كما في الشكل (9-8 أ) بحيث نكتب السرعة الزاوية لهذا الدوران الأول على النحو:

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} \mathbf{k}_1 = \dot{\phi} \mathbf{K} \quad (87-8)$$

كما نكتب:

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \cos \phi \mathbf{i}_1 - \sin \phi \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{J} = \sin \phi \mathbf{i}_1 + \cos \phi \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{K} = \mathbf{k}_1 \end{cases} \quad (88-8)$$



الشكل (9-8 أ)

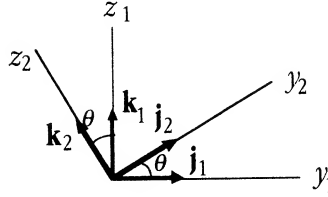
ب - ندور المحاور الجديدة  $x_1y_1z_1$  حول  $ox_1$  زاوية  $\theta$  فنحصل على منظومة أخرى  $ox_2y_2z_2$  ينطبق فيها  $ox_1$  على  $ox_1$  بينما يصنع  $oz_1$  زاوية  $\theta$  مع  $oz_2$ ، أو مع  $oZ$  الأصلي (الشاقولي الثابت في الفضاء)، كما في الشكل (9-8 ب). من ثم نكتب متجه السرعة الزاوية للدوران الجديد بالشكل:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} \mathbf{i}_1 = \dot{\theta} \mathbf{i}_2 \quad (89-8)$$

كما نكتب من الشكل (9-8 ب) أيضاً:

(90-8)

$$\begin{cases} \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{j}_1 = \cos \theta \mathbf{j}_2 - \sin \theta \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_1 = \sin \theta \mathbf{j}_2 + \cos \theta \mathbf{k}_2 \end{cases}$$



الشكل (9-8) ب)

ج- أخيراً ندور المحاور  $x_2 y_2 z_2$  حول  $oz_2$  بزاوية  $\psi$  لنصل إلى محاور الجسم  $xyz$ ، كما في الشكل (9-8 ج) بحيث ينطبق  $oz_2$  على  $oz$  (الذي نختاره محوراً أساساً من محاور الجسم، وإن كان الجسم متناظراً حول محور ما فنختار  $oz$  ليكون ذلك المحور)، كما يصنع  $ox$  زاوية  $\psi$  مع  $ox_2$ .

من ثم نكتب السرعة الزاوية للدوران الأخير بالشكل:

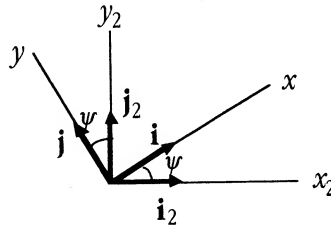
(91-8)

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}_2 = \omega \mathbf{k}$$

كما نكتب من الشكل (9-8 ج):

(92-8)

$$\begin{cases} \mathbf{i}_2 = \cos \psi \mathbf{i} - \sin \psi \mathbf{j} \\ \mathbf{j}_2 = \sin \psi \mathbf{i} + \cos \psi \mathbf{j} \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} \end{cases}$$

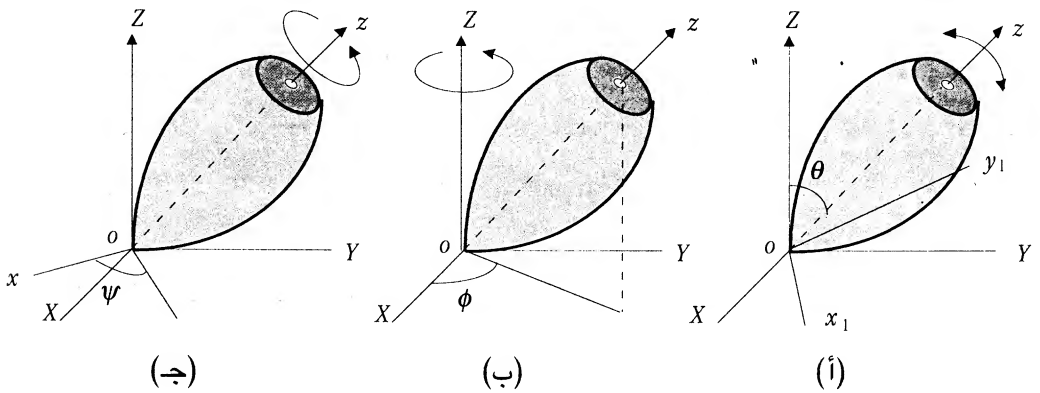


الشكل (9-8) ج)

بهذا نكون قد انتقلنا من منظومة الفضاء  $XYZ$  لمنظومة الجسم  $xyz$  التي يمكن معرفة اتجاهاتها بالنسبة للمنظومة الأولى بمعرفة تغيرات  $\phi$  و  $\theta$  و  $\psi$  في كل لحظة. لا بأس من الإشارة إلى أن تعريف هذه الزوايا ليس عاماً بل قد يختلف من كتاب لآخر وقد اتبعنا في الكتاب الحالي مصطلح ماريون (انظر المراجع). تكون السرعة الزاوية الكلية للجسم الصلب هي مجموع السرعة الزاوية للدورانات الثلاثة، أي أن:

$$\omega = \dot{\phi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{i}_1 + \dot{\psi} \mathbf{k} \quad (8-93)$$

نلاحظ من معادلة متجه السرعة الزاوية أنه إذا تغيرت  $\theta$  فقط مع بقاء  $\phi$  و  $\psi$  ثابتتين فإن الجسم يدور حول المحور  $ox$  (أو خط العقد *Line of nodes*) بحيث يتغير بعد المحور  $oz$  المتعلق بالجسم عن المحور  $oZ$  (الشاقولي الثابت)، كما في الشكل (8-10أ). أما عندما تتغير  $\phi$  فقط مع بقاء  $\theta$  و  $\psi$  ثابتتين فإن الجسم يكون مائلاً عن الشاقول ويدور حوله بسرعة زاوية  $\phi$  بدون أن يفتل حول نفسه أو يتأرجح خلال دورانه، كما في الشكل (8-10ب). أخيراً عندما تتغير  $\psi$  فقط مع بقاء  $\theta$  و  $\phi$  ثابتتين فإن الجسم يفتل حول محوره  $oz$  بدون أن يدور حول الشاقول  $oZ$  أو يتأرجح خلال فتلته، كما في الشكل (8-10ج).



الشكل (8-10)

لنكتب الآن دالة لاغرانج للجسم الصلب بالتعبير عن طاقته الحركية مستفيدين من



المعادلة (8-53) ووصف  $\omega$  بدلالة مركباته على المحاور الأساس المرتبطة بالجسم  $\omega$  و  $k$ . فنكتب (8-93) مرة أخرى بعد الاستفادة من (8-88) و (8-90) و (8-92):

$$(8-95) \quad \begin{cases} \omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_y = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{cases}$$

وتصبح الطاقة الحركية للجسم عندئذ معطاة بالعلاقة :

$$(8-96) \quad T = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$$

حيث نلاحظ أنها ستكون بشكل عام دالة (تابعاً) معقدة للزوايا  $\theta$  و  $\phi$  و  $\psi$  ومشتقاتها كما أن المحاور  $oz$  و  $ox_1$  و  $oy_1$  ليست متعامدة، أي أن الحدود الحاوية على الجداءات المختلطة  $\dot{\theta}\dot{\phi}$  و  $\dot{\phi}\dot{\psi}$  و  $\dot{\theta}\dot{\psi}$  لن تختفي في هذه الحال .

أما إذا كان للجسم محور تناظر (الذي نختاره ليكون  $oz$ )، عندئذ يكون  $I_x = I_y$  وتصير  $T$  معطاة بالعلاقة:

$$(8-97) \quad T = \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

بعد الحصول على الطاقة الحركية يمكن كتابة طاقة الوضع  $V = V(\theta, \phi, \psi)$  أو القوى العامة  $Q_\theta$  و  $Q_\phi$  و  $Q_\psi$ ، وهي العزوم حول المحاور  $oz$  و  $ox_1$  و  $oy_1$ ، على الترتيب، بحسب المسألة المدروسة، ثم نكتب دالة لاغرانج اللازمة لدراسة حركة الجسم في الفضاء.

## 17-8 البلبل المتناظر (The Symmetric Top)

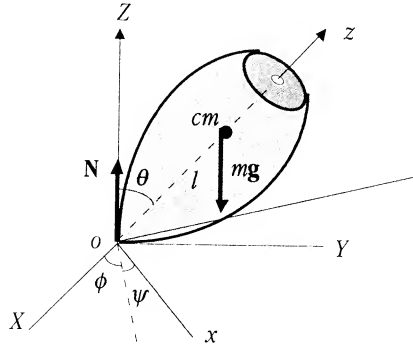
سندرس في هذه الفقرة دوران البلبل المتناظر (أو الدوامة) المؤلف من جسم متناظر حول المحور  $oz$  (أي أن  $I_x = I_y$ ) حول نقطة ثابتة  $O$  تقع على محوره ويقع مركز كتلته  $C$  على بعد  $l$  من  $O$ ، كما في الشكل (8-11). بذلك يخضع البلبل لقوتي الثقل  $mg$  ورد الفعل  $N$ .

نلاحظ أن طاقة وضع البلب هي:

$$(98-8) \quad V = m g z_{cm} = m g l \cos \theta$$

بالتالي نكتب دالة لاغرنج من (97-8) و (98-8) على النحو:

$$(99-8) \quad L = \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - m g l \cos \theta$$



الشكل (11-8)

من الواضح أن  $L$  لا يحوي  $\psi$  و  $\phi$ ، أي أنهما إحداثيان مهملان ونكتب:

$$(100-8) \quad p_{\psi} = \frac{dL}{d\dot{\psi}} = I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{ثابت}$$

و

$$(101-8) \quad p_{\phi} = \frac{dL}{d\dot{\phi}} = I_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_z \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + p_{\psi} \cos \theta$$

بكتابة الطاقة الكلية نجد:

$$(102-8) \quad E = \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + m g l \cos \theta$$

لكن

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \frac{p_{\psi}}{I_z}$$

و

$$\dot{\phi} \sin \theta = \frac{p_{\phi} - p_{\psi} \cos \theta}{I_x \sin \theta}$$

فيكون:

$$(103-8) \quad E = \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + (\frac{p_{\phi} - p_{\psi} \cos \theta}{I_x \sin \theta})^2) + \frac{p_{\psi}^2}{2I_z} + m g l \cos \theta$$

أو:

$$(104-8) \quad E' = \frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + V(\theta)$$

حيث:

$$(105-8) \quad E' = E - \frac{p_{\psi}^2}{2I_z}$$

و:

$$(106-8) \quad V(\theta) = \frac{(p_{\phi} - p_{\psi} \cos \theta)^2}{2I_x \sin^2 \theta} + m g l \cos \theta$$

نجد من المعادلة (104-8) :

$$(107-8) \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_x} (E' - V(\theta))}$$

ومنه:

$$(108-8) \quad \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V(\theta))}} = \sqrt{\frac{2}{I_x}} (t - t_0)$$

بإيجاد  $\theta$  يمكن إيجاد  $p_{\psi}$  و  $p_{\phi}$  ثم  $\psi$  و  $\phi$ ، ونكون قد قمنا بحل المسألة كاملة.

## 1-17-8 مناقشة حركة البلبل بطريقة الطاقة

أ -  $\omega_z=0$ : البلبل لا يفتل حول محور تناظره

نلاحظ مباشرة أن  $p_\psi = I_z \omega_z = 0$  وتصير المعادلة (8-103) على النحو:

$$(108-8) \quad E = \frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + \frac{p_\phi^2}{2 I_x \sin^2 \theta} + m g l \cos \theta$$

هذه المعادلة مطابقة لمعادلة البندول الكروي الذي درسناه سابقاً.

ب -  $\omega_z \neq 0$ : البلبل يفتل حول محور تناظره

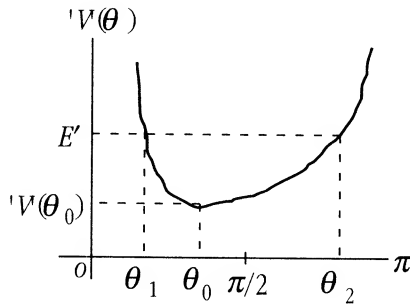
في هذه الحالة نعود للمعادلة (8-106) ونبحث عما إذا كان لـ ' $V(\theta)$ ' نهايات

صغرى، فنكتب:

$$(109-8) \quad \frac{d^2 V(\theta)}{d\theta^2} = -m g l \sin \theta + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)(p_\psi - p_\phi \cos \theta)}{I_x \sin^3 \theta}$$

نلاحظ من هذه المعادلة أن  $d^2 V(\theta)/d\theta^2 > 0$  عند  $\theta = \pi$  وأن  $d^2 V(\theta)/d\theta^2 < 0$  عند  $\theta = 0$  لذا يجب أن يكون معدوماً عند قيمة ما لـ  $\theta$  محصورة بين الصفر و  $\pi$  معطاة بالعلاقة:

$$(110-8) \quad m g l \sin^4 \theta_0 + (p_\phi - p_\psi \cos \theta_0)(p_\psi - p_\phi \cos \theta_0) = 0$$



الشكل (8-12)

يمكن التحقق من أن قيمة  $\theta$  هذه أقل من  $\pi/2$  بدراسة المشتق  $dV(\theta)/d\theta$  عندما  $\theta < \pi/2$  و  $\theta > \pi/2$  فنجد أنه سالب في الحالة الأولى وموجب في الثانية مما يعني أن تغيرات  $V(\theta)$  مع  $\theta$  ستكون مشابهة لما هو موضح بالشكل (8-12).

نبدأ مناقشة الحركة بدراسة الإحتمالات التالية:

أولاً: إذا كان  $V(\theta_0) = E'$  عندئذ تكون  $\dot{\theta} = 0$  دائماً ويدور البلبل حول  $oZ$  (الشاقول الثابت) صانعاً معه زاوية ثابتة  $\theta_0$ ، وتعطى سرعته الزاوية خلال دورانه بالعلاقة:

$$(8-111) \quad \dot{\phi}_0 = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta_0}{I_x \sin^2 \theta_0}$$

لكن البلبل لا يمكن أن يحقق الحركة السابقة إلا إذا كان فتلته  $\omega_z$  حول محوره سريعاً بدرجة كافية، لأن حل المعادلة (8-110) بالنسبة للمقدار  $p_\phi - p_\psi \cos \theta_0$  يعطي:

$$(8-112) \quad p_\phi - p_\psi \cos \theta_0 = \frac{1}{2} I_x \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 m g l I_x \cos \theta_0}{I_z^2 \omega_z^2}} \right]$$

ونلاحظ أن هناك حلاً مقبولاً لهذه المعادلة طالما أن:

$$\frac{4 m g l I_x \cos \theta_0}{I_z^2 \omega_z^2} \leq 1$$

أي أن:

$$(8-113) \quad \omega_z \geq \sqrt{\frac{4 m g l I_x \cos \theta_0}{I_z^2}}$$

فلا يمكن للبلبل أن يدور صانعاً زاوية ثابتة مع الشاقول إذا كانت  $\omega_z$  أصغر من قيمة معينة  $(\omega_z)_{min}$  هي:

$$(8-114) \quad (\omega_z)_{min} = \sqrt{\frac{4 m g l I_x \cos \theta_0}{I_z^2}}$$

أما إذا كانت  $\omega_z > (\omega_z)_{min}$  عندئذ توجد قيمتان ممكنتان لـ  $p_\phi - p_\psi \cos \theta_0$  فهناك سرعتان زاويتان ممكنتان للدوران حول  $OZ$ ،  $(\dot{\phi})_{max}$  و  $(\dot{\phi})_{min}$  الموافقتان للإشارتين + و - في (112-8)، على الترتيب. يمكن إيجاد القيم التقريبية لهاتين السرعتين عندما يفتل البلبل بسرعة كبيرة حول محوره، أي عندما  $\omega_z \gg (\omega_z)_{min}$ ، حيث نلاحظ أن:

$$\frac{4mg l I_x \cos \theta_0}{I_z^2 \omega_z^2} \ll 1$$

أي أن:

$$(1 - \frac{4mg l I_x \cos \theta_0}{I_z^2 \omega_z^2})^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} (\frac{4mg l I_x \cos \theta_0}{I_z^2 \omega_z^2})$$

لذلك نجد أن الإشارة الموجبة في (112-8) تعطي:

$$(115-8) \quad (\dot{\phi}_0)_{max} \approx \frac{I_z \omega_z}{\cos \theta_0}$$

كما تعطي الإشارة السالبة:

$$(116-8) \quad (\dot{\phi}_0)_{min} \approx \frac{mgl}{I_z \omega_z}$$

يمكن للعين المجردة مشاهدة البلبل وهو يدور بالسرعة الصغرى أما السرعة العالية فلا يمكن ملاحظتها. ونلاحظ أن  $(\dot{\phi}_0)_{max}$  موجبة في كلا الحالتين، أي أن البلبل يدور حول الشاقول بالإتجاه الموجب، أي بإتجاه محور تناظره  $OZ$ .

**ثانياً:** إذا كان  $V(\theta_0) > E'$  عندئذ نلاحظ من الشكل (12-8) أنه من أجل قيمة محددة لـ  $E'$  فإن هناك زاويتان  $\theta_1$  و  $\theta_2$  يصبح عندها  $E' = V(\theta)$  بالتالي تكون عندهما  $\dot{\theta} = 0$ ، أي أن محور البلبل يتذبذب بين  $\theta_1$  و  $\theta_2$  اقتراباً وابتعاداً عن الشاقول خلال دورانه حوله (وفتله حول محوره طبعاً). يطلق على هذه الحركة

الإهتزازية إسم تذبذب (nutations) ونجد الزاويتين  $\theta_1$  و  $\theta_2$  (زاويتي الدوران) بوضع  $\dot{\theta} = 0$  في (8-103) فنجد:

$$(117-8) \quad E' = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_x \sin^2 \theta} + m g l \cos \theta$$

نلاحظ في كل الأحوال أن حركة البلبل تعتمد على  $E'$  و  $p_\phi$  و  $p_\psi$  التي تتحدد جميعها من شروط البدء.

الآن: لو أمعنا النظر في حركة البلبل وراقبنا دورانه حول الشاقول للاحظنا أن هناك احتمال أن يتغير اتجاه دورانه بحسب إشارة سرعته الزاوية  $\dot{\phi}$  التي نجدها من العلاقة:

$$(118-8) \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I_x \sin^2 \theta}$$

فإذا افترضنا أن  $|p_\phi| < |p_\psi|$  عندئذ نكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\psi \left( \frac{p_\phi}{p_\psi} - \cos \theta \right)}{I_x \sin^2 \theta}$$

وبوضع:

$$(119-8) \quad \frac{p_\phi}{p_\psi} = \cos \theta_c$$

تصير (8-118) على النحو:

$$(120-8) \quad \dot{\phi} = \frac{p_\psi}{I_x \sin^2 \theta} (\cos \theta_c - \cos \theta) = \frac{I_z \omega_z}{I_x \sin^2 \theta} (\cos \theta_c - \cos \theta)$$

نستنتج من المعادلة السابقة أنه إذا كانت  $\theta > \theta_c$  فإن  $\cos \theta < \cos \theta_c$  ويكون  $\dot{\phi} > 0$ ،

أما إذا كانت  $\theta < \theta_c$  فإن  $\cos \theta > \cos \theta_c$  ويكون  $\dot{\phi} < 0$ .

أي أنه إذا تغيرت الزاوية  $\theta$  التي يصنعها محور تناظر الجسم مع الشاقول بحيث تكون في مرحلة ما أكبر من زاوية ثابتة  $\theta_c$  (محددة من شروط البدء) ثم تصير أصغر منها فإن السرعة الزاوية لدوران البلبل حول الشاقول تغير اتجاهها بالتأكد وتصبح إشارة  $\dot{\phi}$  مغايرة لإشارة  $\omega_z$  قطعاً.

نحدد الآن فيما إذا كانت  $\theta_c$  أكبر أو أصغر من الزاوية  $\theta_2$  (زاوية الدوران الكبرى)، فنلاحظ من (8-108) أن:

$$\left. \frac{d^2 V(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_c} = -m g l \sin \theta_c < 0$$

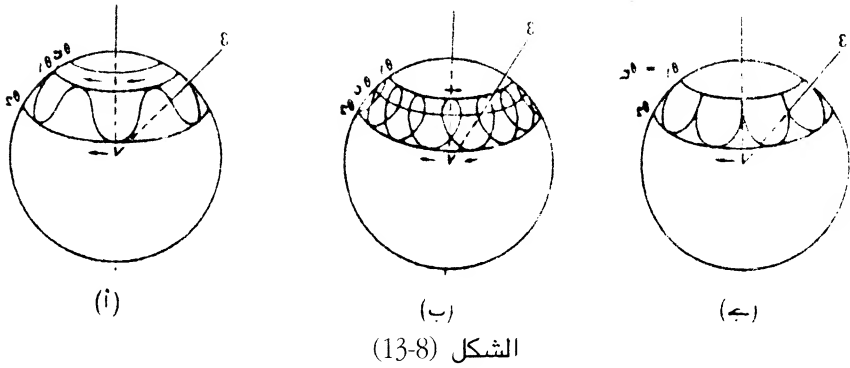
عندما  $0 < \theta < \pi$  أي أن ميل المنحني الممثل لـ  $V(\theta)$  عندما  $\theta = \theta_c$  سالب، بالتالي يجب أن تكون  $\theta_0 < \theta_c$  أي أن  $\theta_c < \theta_2$  حتماً لأن  $\theta_0 < \theta_2$ .

يبقى دراسة احتمالي كون  $\theta_c$  أكبر أو أصغر من  $\theta_1$ . فإذا كانت  $\theta_c < \theta_1$  أي أن  $\cos \theta_c > \cos \theta_1$  عندئذ ستتغير  $\theta$  بحيث تبقى دائماً أكبر من  $\theta_c$  (لأن  $\theta$  محصورة بين  $\theta_1$  و  $\theta_2$ )، أي  $\cos \theta < \cos \theta_c$  على الدوام وتبقى إشارة  $\dot{\phi}$  هي نفسها فيدور محور تناظر البلبل ليرسم منحنيًا مشابهًا لذلك الموضح في الشكل (8-113) إذ أن محور البلبل يدور حول الشاقول بنفس الاتجاه دوماً مع أنه يتذبذب اقتراباً وابتعاداً عن هذا الشاقول بين الزاويتين  $\theta_1$  و  $\theta_2$ . أما إذا كانت  $\theta_c > \theta_1$  عندئذ ستمر  $\theta$  بمرحلتين تكون في أولاهما أصغر من  $\theta_c$  (أي أن إشارة  $\dot{\phi}$  مغايرة لإشارة  $\omega_z$ ) بينما تصير في المرحلة الثانية أكبر من  $\theta_c$  وتصبح إشارة  $\dot{\phi}$  مماثلة لإشارة  $\omega_z$  وهذا يعني أن جهة دوران محور تناظر البلبل حول الشاقول ستتغير خلال تذبذبه بين  $\theta_1$  و  $\theta_2$  وسيُرسَم منحنيًا مشابهًا لذلك الموضح في (8-113ب).

أخيراً، إذا كانت  $\theta_c = \theta_1$  عندئذ تصبح  $\dot{\phi} = 0$  عندما  $\theta = \theta_1$  وبالتالي فإن  $\dot{\phi}$  لا تغير إشارتها تماماً خلال دوران البلبل بل تصبح السرعة الزاوية لهذا الدوران حول الشاقول معدومة آنياً عندما يقترب المحور من الشاقول عند الزاوية  $\theta_1$ ، ثم يتابع



دورانه عندما تصير  $\theta_1 > \theta$  ويرسم المحور منحنياً مشابهاً لذلك الموضح في الشكل (13-8 ج).



## 2-17-8 مناقشة حركة البلبل بالطريقة التحليلية

يمكن التوصل إلى معظم النتائج السابقة بالطريقة التحليلية إذا وضعنا  $\cos \theta = u$  في المعادلة (103-8) أي أن  $\sin^2 \theta = 1 - u^2$ ، و  $\dot{\theta} = -(\sin \theta) \dot{\theta} = -(1 - u^2)^{1/2} \dot{\theta}$  فنجد، بعد الإصلاح، أن:

$$\dot{u}^2 = f(u) \quad (121-8)$$

حيث:

$$f(u) = (1 - u^2)(2E - I_z \omega_z^2 - 2mglu)I_x^{-1} - (p_\phi - I_z \omega_z u)^2 I_x^{-2} \quad (122-8)$$

ويكون من (121-8):

$$dt = \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

أي أن:

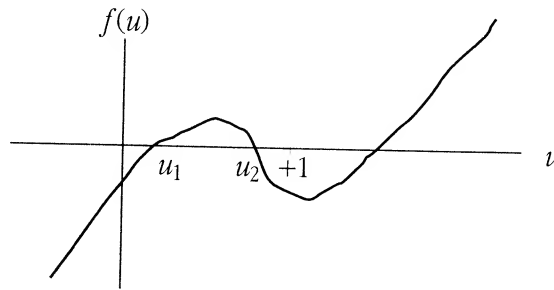
$$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \quad (123-8)$$

بمأن  $f(u)$  دالة من الدرجة الثالثة في  $u$  فإن التكامل (123-8) سيعطي دالة قطعية (*elliptic function*) إلا أنه لاجابة لإجراء التكامل لمناقشة الحركة، لأن  $f(u)$  يجب أن

يبقى موجباً دوماً حتى تبقى  $t$  مقداراً حقيقياً، لذلك ستحدد الحركة بقيم  $\theta$  التي تجعل  $f(u) \geq 0$ . بحصر  $\theta$  بين 0 و  $\pi/2$  نجد أن  $u$  ستتغير بين +1 و 0.

إذا رسمنا  $f(u)$ ، كما في الشكل (14-8)، نلاحظ أن هناك قيمتان لـ  $u$  هما  $u_1$  و  $u_2$  بين الصفر و 1، أي أن حدود تذبذب محور البلبل محصورة بين زاويتين  $\theta_1$  و  $\theta_2$ ، وإذا كان الجذران  $u_1$  و  $u_2$  متساويان، عندئذ يدور البلبل حول الشاقول صانعاً زاوية ثابتة معه.

تتوافق هذه النتائج مع ما وجدناه عند مناقشة الحركة بطريقة الطاقة.



الشكل (14-8)

## 8 - 18 البلبل النائم (The Sleeping Top)

من المعروف لكل من لعب يوماً ببلبل أنه إذا بدأ البلبل حركته بسرعة دوران كبيرة حول محوره (أي قتل عال) فإن محوره يبقى شاقولياً تقريباً وثابتاً إلى أن يفقد البلبل بعضاً من طاقته نتيجة احتكاك نقطة ارتكازه مع الأرض، فبيد المحور بالميلان رويداً رويداً وتبدأ ظواهر التذبذب ويزداد الميل إلى أن يقع البلبل. إن بقاء المحور شاقولياً في البدء وثباته في ذلك الموضع هو مانطلق عليه اسم **البلبل النائم**. ويمكن إيجاد الشرط الذي يجب أن تحققه سرعة القتل حول محور تناظر البلبل حتى ينام من المعادلة (122-8) ووضع  $\theta = \dot{\theta} = 0$ ، أي يجب أن يكون:

$$(124-8) \quad f(u) = (1 - u^2(2E - I_z \omega_z^2 - 2mgl u))I_x^{-1} - (p_\phi - I_z \omega_z u)^2 I_x^{-2} = 0$$

لكن في هذه الحالة فإن:

$$E = mgl + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$$

و

$$p_\phi = I_z \omega_z$$

لذلك تصير (124-8) على الشكل:

$$(1 - u^2) \left[ \frac{2mgl}{I_x} (1 + u) - \frac{I_z \omega_z^2}{I_x^2} \right] = 0$$

فحتى يكون لـ  $f(u)$  جذر واحد مضاعف عند  $u=1$  (أي  $\theta=0$ ) يجب أن يكون المقدار ما بين القوسين [ ] في المعادلة السابقة يساوي الصفر. ويجب أن يكون الجذر الثالث الناتج عنه أكبر من الواحد، أي أن:

$$u_3 = \frac{I_z^2 \omega_z^2}{2I_x mgl} - 1 > 1$$

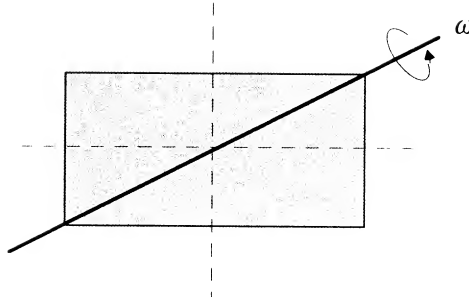
فنجد:

$$\omega_z \geq \sqrt{\frac{4I_x mgl}{I_z^2}} \quad (125-8)$$

نستنتج إذاً أنه حتى ينال البلبل يجب أن يدور حول محوره بسرعة زاوية أكبر أو تساوي  $\sqrt{4I_x mgl / I_z^2}$ .  
لقد كان بالإمكان الوصول إلى نفس النتيجة مباشرة لو لاحظنا من (113-8) أنه عندما  $\theta_0 = 0$  فإن  $\omega_z$  تصير مطابقة لـ (125-8).

## 8 - 19 مثال

يدور متوازي مستطيلات أبعاده  $a$  و  $2a$  و  $3a$  حول قطر كبير فيه بسرعة زاوية  $\omega$ .  
جد طاقته الحركية والزاوية بين متجه السرعة الزاوية والزخم الزاوي بالنسبة لمبدأ منظومة إحداثية مبدؤها مركز المتوازي ومحاورها توازي وجوهه.  
**الحل:** من الواضح أنه بسبب تناظر الجسم فإن منظومة محاور الجسم المطلوبة هي محاور أساس ، كما في الشكل (15-8) ونكتب من الجدول 6-1 مباشرة :



الشكل (8-15)

$$I_1 = \frac{m}{12} [(2a)^2 + (3a)^2] = \frac{13}{12} ma^2$$

$$I_2 = \frac{m}{12} [a^2 + (3a)^2] = \frac{10}{12} ma^2$$

$$I_3 = \frac{m}{12} [a^2 + (2a)^2] = \frac{5}{12} ma^2$$

كما نحلل متجه السرعة الزاوية (تحقق من ذلك):

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{14}} (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)$$

وتصير الطاقة الحركية من (8-54):

$$T = \frac{1}{2} [I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2] = \frac{7}{24} ma^2 \omega^2$$

أما الزخم الزاوي فنجد بكتابة:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \frac{ma^2 \omega}{12\sqrt{14}} (13\mathbf{e}_1 + 20\mathbf{e}_2 + 15\mathbf{e}_3)$$

أخيراً نجد الزاوية بين  $\mathbf{L}$  و  $\boldsymbol{\omega}$  بكتابة:

$$\cos \theta = \frac{\omega \cdot L}{|\omega||L|} = \frac{\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}} = 0.929$$

أي أن  $\theta \approx 22^\circ$ .

## مسائل

1-8 حول الممتد التالي:  $T = AB + BA$  حيث  $A = 5i - 3j + 2k$  و  $B = 5j + 10k$  إلى منظومة محاور جديدة دارت حول المحور  $oz$  زاوية  $45^\circ$ .

2-8 أكتب مصفوفة الممتد الناطمي (orthogonal tensor) الذي يؤدي إلى دوران منظومة المحاور الإحداثية زاوية  $\alpha$  حول المحور  $oz$ . حلل  $T$  إلى ممتد متناظر وآخر غير متناظر. ما هو التعليل الهندسي لهذا التحليل؟

3-8 جد القيم المميزة والمتجهات المميزة للممتد المذكور في المسألة 1-8.

4-8 قطر الممتد التالي :

$$T = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2 & -5\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: يمكن تحليل المعادلة المميزة كما أن كل جذورها أعداد صحيحة .

5-8 برهن أن القوة الطاردة:  $-m\omega \times (\omega \times r)$  هي دالة خطية لمتجه الموضع  $r$  وجد العلاقة التي تعطي الممتد المقابل له (على شكل مجموع ثنائيات). اكتب مصفوفة مركبات هذا الممتد.

6-8 ما المحاور الأساسية والقيم المميزة المقابلة لها للممتد المذكور في المسألة 5-8؟

7-8 جد ممتد العطالة لعمود طوله  $l$  وكتلته  $m$  حول مركزه. استعمل هذه النتيجة لإيجاد ممتد العطالة حول مركز هرم متساوي الأضلاع ومؤلف من ستة أضلاع متساوية. برهن أنه يمكن كتابة هذا الممتد مباشرة من اعتبارات التناظر المتوفرة في الهرم.

8-8 أحسب عزم عطالة مخروط قائم ارتفاعه  $h$  ونصف قطر قاعدته  $a$  حول منظومة محاور مبدؤها عند رأس المخروط وينطبق على محوره. احسب مركبات ممتد العطالة للمخروط ثم حوله الى منظومة محاور يقع مبدؤها عند مركز كتلة المخروط وجد عزوم العطالة الأساسية .

9-8 جد ممتد العطالة لمتوازي مستطيلات كتلته  $M$  وأطوال أضلاعه  $a$  و  $b$  و  $c$  مستخدماً أقل عدد من العمليات الجبرية حول محاور تمر من مركز المتوازي بحيث يكون  $oz$  موازياً للضلع  $c$  بينما  $oy$  يكون موازياً لقطر المستطيل المؤلف من الضلعين  $a$  و  $b$  .

10-8 تقع كتلتان  $M/4$  و  $M/8$  على سطح كرة كتلتها  $M$  ونصف قطرها  $R$  بحيث تبعدان عن بعضهما زاوية  $45^\circ$ . جد المحاور الأساس ومركبات ممتد العطالة حول هذه المحاور بالنسبة لمركز الكرة. جد ممتد العطالة حول محاور موازية للمحاور الأساس ومارة من مركز الكتلة.

11-8 جد ممتد العطالة لمستطيل كتلته  $m$  وأبعاده  $b \times a$  .

12-8 تدور صفيحة مستطيلة الشكل طولها  $a$  وعرضها  $b$  وكتلتها  $m$  حول أحد أقطارها بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$ . ما قيمة واتجاه  $L$  بالنسبة لركن المستطيل التي يمر منه محور الدوران؟

13-8 ما قيمة واتجاه  $L$  في المسألة السابقة بالنسبة لمركز الصفيحة وما العزم اللازم حتى يدور بهذا الشكل؟

14-8 برهن أنه إذا خضع جسم متناظر لعزم حول محور تناظره (أي أن  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  و  $\tau_3 \neq 0$ ) فإن المقدار: ثابت  $\omega_1^2 + \omega_2^2$ . وضح كيف يمكن الاستفادة من كون  $\tau_3(t)$  معطى لإيجاد كل من  $\omega_1$  و  $\omega_2$  و  $\omega_3$ .

15-8 كتطبيق مباشر على المسألة السابقة، اعتبر جسماً متناظراً حراً في الفضاء مدفوعاً بمحرك نفاث مركب بشكل متناظر بالنسبة لمحور تناظر الجسم بحيث يؤمن عزماً ثابتاً حول هذا المحور. جد الحل العام لمتجه السرعة الزاوية بدلالة الزمن بالنسبة لمحاور الجسم وصف كيف يتحرك هذا المتجه بالنسبة للجسم.

16-8 ما هي مركبات ممتد العطالة لمكعب طول ضلعه  $a$  وكتلته  $m$  وتنطبق المحاور  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  على أضلاعه الثلاثة المتقاطعة؟ ما الزخم الزاوي والطاقة الحركية لهذا المكعب بالنسبة لنقطة المبدأ مع العلم أنه يدور حولها بسرعة زاوية ثابتة  $\omega = 2i + 5j - 3k$  ؟

17-8 يفتل مخروط قائم نصف قطر قاعدته  $a$  وارتفاعه  $h$  وكتلته  $m$  بحيث تبقى ذروته ثابتة ويصنع محوره زاوية ثابتة  $\alpha$  مع المحور الشاقولي  $oz$  بينما يدور حوله بسرعة زاوية  $\omega_0$  . جد  $\omega$  .

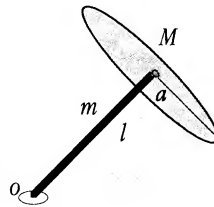
18-8 يوضع مكعب طول ضلعه  $a$  وكتلته  $M$  بحيث تنطبق أضلاعه على المحاور  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  . ما الزخم الزاوي لهذا المكعب إذا دار حول  $oz$  بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$  ؟

19-8 جد المصفوفة  $(a_{ij})$  التي تحول مركبات متجه من محاور الفضاء الى محاور الجسم. عبر عن  $(a_{ij})$  بدلالة زوايا أولر. (مساعدة: يمكن اعتبار هذا التحول عبارة عن ثلاثة دورانات متعاقبة بزوايا  $\theta$  و  $\phi$  و  $\psi$  حول محاور مناسبة وبترتيب محدد).

20-8 اكتب دالة هاميلتون لجسم يدور بشكل حر بدلالة  $\theta$  و  $\phi$  و  $\psi$  و  $p_\theta$  و  $p_\phi$  و  $p_\psi$  . عبر عن أمثال هذه الإحداثيات بدلالة  $I_1$  و  $I_2$  و  $I_3$  . تذكر أن  $H = T + V$  .

21-8 اكتب دالة لاغرانج لبليبل متناظر تنزلق نهاية محوره على طاولة ملساء بدون احتكاك. ناقش بدقة الفروق في الحركة بين هذه الحالة وتلك العائدة الى لبليبل يدور مع بقاء نقطة تماسه مع الطاولة ثابتة.

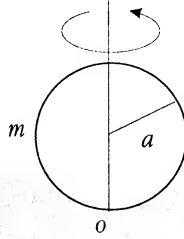
22-8 يتألف لبليبل من قرص نصف قطره  $a$  وكتلته  $M$  وقضيب رفيع كتلته  $m$  وطوله  $l$  يرتبط بالقرص عند المركز، كما في الشكل (8-15). ما السرعة الزاوية التي يجب أن يفتل بها القرص حول محوره حتى ينام إذا بقيت نقطة التماس مع الأرض ثابتة؟



الشكل (8-15)

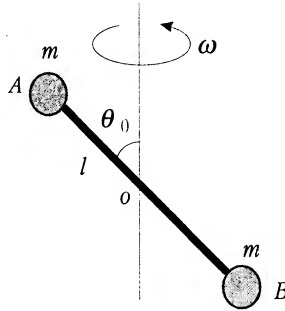
23-8 حل المسألة السابقة في حالة مخروط نصف قطر قاعدته  $a$  وارتفاعه  $h$ .

24-8 تفتل قطعة نقود نصف قطرها  $a$  وكتلتها  $m$  حول قطر شاقولي فيها، كما في الشكل (16-8)، بسرعة زاوية  $\omega$ . برهن أن الحركة مستقرة إذا كان  $\omega^2 > 4g/a$ .



الشكل (16-8)

25-8 يتألف جسم صلب (dumbbell) من كتلتين متساويتين  $m$  معلقتين بطرفي قضيب  $AB$  طوله  $l$  وكتلته مهملة، كما في الشكل (17-8)، بحيث يدور النظام بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$  حول محور شاقولي يصنع زاوية ثابتة  $\theta_0$  مع  $A$ . برهن أن الزخم الزاوي يرسم مخروطاً حول  $AB$  نصف زاويته الرأسية  $\pi/2 - \theta_0$  وأن قيمة  $L$  هي:

$$(ml^2\omega \sin \theta_0)/2$$


الشكل (17-8)

26-8 برهن أن العزم اللازم لإبقاء المنظومة المذكورة في المسألة 25-8 تدور بتلك الطريقة هو  $(ml^2\omega^2 \sin^2 \theta_0)/4$  وحدد اتجاهه.

27-8 افترض أن قطعة النقود في المسألة 24-8 قد فتلت بسرعة زاوية  $\omega_0$  حول قطر لها يصنع زاوية  $\alpha$  مع الشاقول بحيث تبقى النقطة  $O$  ثابتة. جد السرعة الزاوية التي ستدور بها قطعة النقود بفرض أنه لا يوجد تذبذب.



28-8 يتدحرج مخروط نصف قطر قاعدته  $a$  وارتفاعه  $h$  وكتلته  $M$  على سطح أفقي بسرعة زاوية  $\omega$  بحيث تبقى ذروته ثابتة دوماً. برهن أن الطاقة الحركية الدورانية هي

$$T = 3Mh^2(a^2 + 6h^2)\omega^2 / 40(a^2 + h^2)$$

29-8 برهن أنه إذا دارت قطعة مستوية بشكل حر ( $\tau=0$ ) فإن مركبة السرعة الزاوية  $\omega_1$  في مستوي الصفيحة ثابتة بالقيمة مع كون  $\omega_3$  غير ثابتة بالضرورة. (مساعدة: استخدام نظرية المحاور المتعامدة). ما شكل القطعة إذا كان: ثابت  $\omega_3$ ؟

30-8 يدور قرص متجانس كتلته  $m$  ونصف قطره  $a$  بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$  حول محور مار من مركزه ويصنع زاوية  $45^\circ$  مع محوره. ما قيمة وإتجاه زخمه الزاوي؟

31-8 يدور جسم صلب متناظر في الفضاء بسرعة زاوية  $\omega$  حول مركز كتلته بوجود عزم ناتج عن قوى الاحتكاك بين الجسم والهواء معطاة بـ  $c\omega$ . برهن أن مركبة  $\omega$  على محور تناظر الجسم تتناقص بشكل أسي (*exponentially*) مع الزمن. برهن أيضاً أن الزاوية بين السرعة الزاوية  $\omega$  ومحور التناظر تتناقص بشكل منتظم إذا كانت مركبة عزم العطالة حول هذا المحور هي أكبر عزم عطالة أساس للجسم.